DIE ROTATIONSDISPERSION DES WASSERSTOFFS

(EIN BEITRAG ZUR KENNTNIS DER KONSTITUTION DES WASSERSTOFFMOLEKÜLS)

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER GEORG-AUGUST-UNIVERSITÄT ZU GÖTTINGEN

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

VORGELEGT VON

PAUL SCHERRER

ST. GALLEN (SCHWEIZ)

GÖTTINGEN 1916

Von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung angenommen.

Tag der mündlichen Prüfung: 16. Februar 1916.

Referent: Herr Prof. Dr. *P. Debye.*

Druck von August Pries in Leipzig.

MEINER LIEBEN MUTTER

IN DANKBARKEIT ZUGEEIGNET

Inhalt.

Seite

I. Einleitung 7
§ 1. Ziel 7
§ 2. Methode 8
II. Ausführung der Rechnung 10
§ 3. Definition des völlig ungestörten Modells 10
§ 4. Zusammenhang zwischen Bahnradius a und Umlaufsgeschwindigkeit ω bei Vorhandensein eines Magnetfeldes mit den Werten a_0 und ω_0 beim völlig ungestörten Modell 12
§ 5. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Elektronen des Modells bei beliebigen störenden Kräften 17
§ 6. Erneute Berechnung der säkularen Störungen beim Entstehen eines Magnetfeldes 20
§ 7. Die Störungsgleichungen im Felde einer Lichtwelle als störender Kraft 26
§ 8. Das elektrische Moment eines H_2-Moleküls 30
§ 9. Die Komponenten des mittleren Momentes eines cm³ als lineare Funktionen der Komponenten von $\mathfrak{E}$ 35
§ 10. Exkurs über den Zusammenhang der linearen Vektorfunktion $\mathfrak{P}(\mathfrak{E})$ mit der Drehung der Polarisationsebene 40
§ 11. Vergleich der Rotationsdispersion mit der gewöhnlichen Dispersionsformel. Entwicklung von V nach Potenzen von $\frac{s}{\omega}$ 43
III. Vergleich mit der Erfahrung 45
§ 12. Berechnung von $\frac{\varepsilon}{\mu}$ und ε auf Grund der empirischen Formel Siertsemas 45

I. Einleitung.

§ 1. Ziel.

Herr P. Debye[1]) hat kürzlich ein besonders einfaches Modell für das Wasserstoffmolekül vorgeschlagen und auf Grund der Gesetze der Mechanik, des Coulombschen Gesetzes und der Quantenhypothese die Dispersion des Wasserstoffs berechnen können. Die Übereinstimmung der berechneten Formel mit der Erfahrung ist vorzüglich. Das Hauptgewicht ist hier nicht etwa auf den Bau der Dispersionsformel zu legen, die ja große Ähnlichkeit mit der Drudeschen hat und überdies im ganzen experimentell erreichbaren Gebiet durch eine frühzeitig abgebrochene Reihenentwicklung ersetzt werden kann. Vielmehr hat man den wesentlichen Fortschritt darin zu erblicken, daß, während in der Drudeschen Darstellung Elektronenzahlen und Eigenfrequenzen eine Rolle spielen, über deren Größe man von vornherein nicht im mindesten unterrichtet ist, bei der Debyeschen Formel keine einzige Konstante aus Dispersionsexperimenten abgeleitet wird, und alles von vornherein ausdrückbar ist in universellen Konstanten.

Es ist wohl sicher, daß wir im Zusammenhange mit dem Planckschen Wirkungsquantum von den althergebrachten Prinzipien eines oder mehrere aufzugeben haben werden. Leider ist eine genaue Formulierung eines neuen allumfassenden Prinzips noch nicht gelungen. Deshalb sind wir wenigstens vorläufig noch ganz und gar darauf angewiesen, in langsamem Fortschreiten Gesetz nach Gesetz zu prüfen. In diesem Sinne können wir die bisher ausgeführte Dispersionsrechnung als Bestätigung dafür ansehen, daß die klassischen Gesetze der Mechanik für die Berech-

1) P. Debye, Sitzungsber. d. königl. Bayr. Akad. 1915. 1.

nung der Störungen im Innern des Atoms aufrecht erhalten werden können.

Bei der großen Unklarheit, die der Formulierung der Wirkung eines Magnetfeldes anhaftet, schien es von besonderem Interesse, das Verhalten eines H_2-Modells unter Einwirkung eines Magnetfeldes zu untersuchen. Als Effekt wählen wir den Faradayeffekt (magnetische Drehung der Polarisationsebene) und berechnen versuchsweise, unter vollständiger Anlehnung an die althergebrachten Prinzipien, die Größe jenes Effektes. Das heißt also, wir versuchen den Effekt nach Größe und Dispersion vollständig vorherzusagen unter alleiniger Benutzung universeller Konstanten. Als Resultat finden wir: Die klassischen Gesetze für die Wirkung eines Magnetfeldes sind im Atommodell anwendbar.

§ 2. Methode.

Die Berechnung zerlegen wir in verschiedene Schritte:

Der erste Schritt besteht darin, daß wir die veränderte Bewegung der Elektronen berechnen bei einem H_2-Modell, dessen Konstitution durch vorläufige Weglassung einer Quantenhypothese noch nicht vollständig festgelegt ist. Als störende Kräfte kommen in Betracht:

1. die bekannten der Geschwindigkeit proportionalen Kräfte des Magnetfeldes,
2. die elektrischen Kräfte einer beliebig polarisierten auffallenden Lichtwelle.

Die allgemeinen Gleichungen werden im Sinne der Störungsrechnung durch sukzessive Näherung gelöst, und zwar wird als Ausgangspunkt der Näherung eine „ungestörte“ Bewegung gewählt, bei der die beiden Elektronen auf einem Kreise vom Radius a mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω rotieren. Die hier angedeutete Rechnung ist nur insofern von der Debyeschen verschieden, als durch Anwesenheit des Magnetfeldes die störenden Kräfte etwas komplizierter sind. Bei der ungestörten Bewegung, von der wir ausgehen, sind die Ausgangswerte von a und ω in gewohnter Weise dadurch miteinander verknüpft, daß sich die anziehende Kraft der Kerne, die gegenseitige Abstoßung der Elektronen, Zentrifugalkraft und Wirkung der magnetischen Komponente in Richtung der Verbindungslinie der Kerne des H_2-Moleküls

das Gleichgewicht halten mußten. Es sind also zunächst noch sehr viele verschiedene Modelle möglich, z. B. je nach Wahl von ω.

Die Störungsrechnung sei erledigt. Dann tritt die Frage an uns heran: Welche Werte von a und ω im Magnetfelde entsprechen den durch die h-Hypothese bestimmten Werten a_0 und ω_0 im unbeeinflußten H_2-Modell? Auf jeden Fall sind die Änderungen, die a_0 und ω_0 erfahren haben, kleine Größen. Wir setzen deshalb $a = a_0 + \delta a$, $\omega = \omega_0 + \delta\omega$. Die eine Gleichgewichtsbedingung, von der oben die Rede war, ist dann als lineare Gleichung in δa und $\delta\omega$ zu schreiben. Es handelt sich darum, eine zweite Gleichung zwischen diesen Größen zu bestimmen. Zu dieser verhilft uns die Bemerkung, daß während des Entstehens des Magnetfeldes im Raume elektrische Kräfte vorhanden waren, die eine Arbeit an den Elektronen des Modells leisteten. Die Gesamtarbeit berechnet sich nach dem Faradayschen Induktionsgesetz. Andererseits müssen wir dieselbe wiederfinden in der kinetischen und potentiellen Energie des Modells, die natürlich ebenfalls in δa und $\delta\omega$ linear ausgedrückt werden kann. So haben wir die gesuchte zweite Gleichung erhalten und können nun schließen (in der bekannten, bei der Erklärung des Diamagnetismus ebenfalls benutzten Art und Weise), daß δa verschwindet und nur $\delta\omega$ einen der Feldstärke proportionalen Wert hat. Damit sind nun auch die Ausgangswerte $a = a_0$ und $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ genau so wie beim unbeeinflußten Molekül auf universelle Größen zurückgeführt. Das Endresultat läßt sich folgendermaßen ausdrücken: Das ganze Gas besteht nach Anlegen des Magnetfeldes aus Molekülen, deren Elektronen um mittlere Bewegungen pendeln, die an sich abhängig sind von der Orientierung des Moleküls in bezug auf das äußere Magnetfeld.

Der zweite Schritt besteht in der Verwendung der nunmehr bekannten innern Bewegungen zur Berechnung des elektrischen Momentes eines cm^3 des Gases. Diese Berechnung wird so ausgeführt, daß für ein H_2-Molekül das elektrische Moment ausgedrückt wird in den verschiedenen Koordinaten und nachträglich gemittelt wird über alle möglichen Orientierungen. Durch Multiplikation mit der Zahl N der Moleküle pro cm^3 folgt dann das gesuchte Moment. Der Unterschied gegenüber dem Fall der reinen Dispersion besteht darin, daß dieses mittlere Moment nun infolge der Anwesenheit des Magnetfeldes nicht mehr parallel der erzeugten

elektrischen Kraft liegt. Es ist jetzt, allgemein gesprochen, das Moment eine lineare Vektorfunktion der elektrischen Kraftkomponenten. Mit andern Worten, das Wasserstoffgas ist kristallinisch geworden.

Der dritte Schritt würde nun darin bestehen, die soeben als Funktion der elektrischen Kraftkomponenten berechnete Polarisation P in die Maxwellschen Gleichungen einzuführen und die möglichen Wellen zu untersuchen. Dieses aber ist schon geschehen, denn unsere lineare Vektorfunktion unterscheidet sich in ihrer allgemeinen Form nicht von der von Drude bei der Erklärung des Faradayeffektes benutzten. Im Speziellen besteht natürlich ein wesentlicher Unterschied darin, daß die Koeffizienten der Funktion bei uns durch universelle Größen vollständig bestimmt sind. Wir können die Resultate der Drudeschen Rechnung einfach übernehmen und z. B. behaupten:

In Richtung der magnetischen Feldstärke pflanzen sich eine rechts- und eine links-zirkular polarisierte Welle mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Der Geschwindigkeitsunterschied ist der Feldstärke in erster Näherung proportional. Bekanntlich ist diese zirkulare Doppelbrechung identisch mit dem Vorhandensein der Drehung der Polarisationsebene, und wir können also schließlich diese Drehung darstellen in der bekannten Form

$$X = V \cdot l \cdot H$$

(H = magnetische Feldstärke in Gauß)
(l = vom Lichtstrahl im Körper zurückgelegter Weg in cm)
(V = Verdetsche Konstante).

Die Verdetsche Konstante V erscheint auf Grund unserer Theorie als ganz bestimmte Funktion der Schwingungszahl s des einfallenden Lichtes, in der außer N nur ε, μ und h als Konstanten vorkommen.

II. Ausführung der Rechnung.

§ 3. Definition des völlig ungestörten Modells.

Wenn das Modell des Wasserstoffmoleküls völlig sich selbst überlassen ist, also gar keine Kräfte von außen auf dasselbe ausgeübt werden, stellen wir uns dasselbe folgendermaßen vor:

Die beiden Elektronen denken wir uns, an den Enden eines

Durchmessers befindlich, auf einem Kreise vom Radius a_0 herumlaufend. Die Kerne des Modells liegen je um d_0 oberhalb bzw. unterhalb der Bewegungsebene der Elektronen, und zwar auf der im Kreismittelpunkt errichteten Normalen zur Kreisfläche.

Die Umlaufszahl ω_0 der Elektronen werden wir durch die Quantenhypothese festlegen. Zunächst jedoch können wir dieselbe völlig unbestimmt lassen; denn das System ist bei jedem ω_0 möglich, nur hängen a_0 und d_0, also die Dimensionen des Modells, von ω_0 ab.

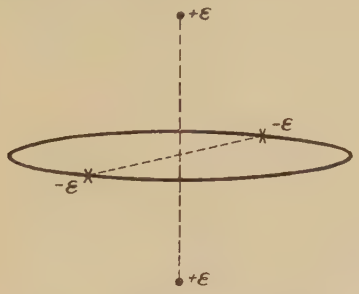

Fig. 1.

Wir setzen auch für das Atominnere die Gültigkeit des Coulombschen Gesetzes und der mechanischen Grundgesetze voraus und können auf diesen Grundlagen leicht Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken des Systems aufstellen.

Als Gleichgewichtsbedingung für die Kerne folgt zunächst:

$$\frac{\varepsilon^2}{4 d_0^2} - 2 \cdot \frac{e^2}{a_0^2 + d_0^2} \cdot \frac{d_0}{\sqrt{a_0^2 + d_0^2}} = 0. \tag{1}$$

Damit das Elektron seine Bahn nicht verläßt, müssen sich an demselben Zentrifugalkraft, Anziehung der beiden Kerne und Abstoßung des zweiten Elektrons das Gleichgewicht halten. Wenn wir die Masse des Elektrons mit μ bezeichnen, gibt dies:

$$\mu a_0 \omega_0^2 - 2 \frac{\varepsilon^2}{a_0^2 + d_0^2} \cdot \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + d_0^2}} - \frac{\varepsilon^2}{4 a_0^2} = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung (1) gibt, nach $\frac{d_0}{a_0}$ aufgelöst,

$$\frac{d_0}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tag{3}$$

während unter Berücksichtigung dieses Wertes aus (2) folgt:

$$\mu a_0 \omega_0^2 = \frac{3\sqrt{3} - 1}{4} \cdot \frac{\varepsilon^2}{a_0^2}. \tag{4}$$

Diese Beziehung zeigt uns, daß wir je nach der Größe der Winkelgeschwindigkeit ω_0 andere Werte für die Abmessungen des Modells erhalten; aber stets ist das System im Gleichgewicht. Mit diesen eben aufgestellten Beziehungen sind die zugrunde gelegten Gesetze erschöpft, und wir hätten keine Möglichkeit ω_0 zu bestimmen, wenn nicht die Quantenhypothese hier helfend eingreifen würde. Nach der von P. Debye[1]) angegebenen umfassenden Formulierung der Quantenhypothese müssen wir verlangen, daß im Falle der ungestörten Bewegung das Impulsmoment jedes Elektrons den Wert $\frac{h}{2\pi}$ besitze.

Dies führt zur Gleichung:

$$\text{Impulsmoment} = \mu a_0^2 \omega_0 = \frac{h}{2\pi} \tag{5}$$

(h = Plancksches Wirkungsquantum).

Wir müssen natürlich später, wenn wir die Ergebnisse unserer Rechnung mit der Erfahrung vergleichen werden, zeigen, daß das ω_0 tatsächlich der Gleichung (5) genügt. Es ist klar, daß wir unsere Rechnung auch mit einem völlig willkürlichen ω_0 ausführen können, um erst am Schlusse durch Vergleich mit dem Experiment das Bestehen der obigen Beziehung zu konstatieren.

Aus (4) und (5) würde für ω_0 der Wert:

$$\omega_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{4}\right)^2 \cdot (2\pi)^3 \cdot \frac{\varepsilon^4 \mu}{h^3} \tag{6}$$

folgen. Wir haben beim Aufbau des Modells bis jetzt nur das Coulombsche Gesetz benützt. Im Sinne der Quantenhypothese nehmen wir an, daß, im Gegensatz zur gewöhnlichen Elektrodynamik, die kreisenden Elektronen nicht strahlen.

§ 4. Zusammenhang zwischen Bahnradius a und Umlaufsgeschwindigkeit ω bei Vorhandensein eines Magnetfeldes mit den Werten a_0 und ω_0 beim völlig ungestörten Modell[2]).

Wir wollen nun untersuchen, wie sich unser Modell ändert, wenn wir dasselbe in ein der Achse des Modells paralleles Magnet-

1) Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität. Leipzig, Teubner 1914.

2) Entsprechende Überlegungen wurden angestellt von W. Voigt, Ann. d. Phys. **9**, 115, 1902; P. Langevin, Ann. Chim. Phys. **5**, 70, 1905.

feld bringen, oder, was auf dasselbe herauskommt, wenn wir an der vom Modell eingenommenen Stelle ein Magnetfeld entstehen lassen. Wir wissen, daß während des Entstehens elektrische Kräfte im Raume vorhanden sind. Diese wirken beschleunigend auf die Bestandteile unseres Modells. Immerhin werden die Beschleunigungen, die die Kerne erfahren, sehr klein sein gegen diejenigen, die die Elektronen erleiden; denn die Massen verhalten sich etwa wie 2000 : 1. Wenn die gesamten Störungen, die die Elektronen erleiden, klein sind gegen die Dimensionen des Modells, sind diejenigen der Kerne dagegen zu vernachlässigen. Wir dürfen dieselben also als ruhend betrachten und brauchen dann nur die kleinen Veränderungen zu untersuchen, die die Elektronenbewegung erleidet.

Wenn das Magnetfeld einen festen Betrag erreicht hat und sich nicht mehr ändert, wirkt auf das Elektron nur noch die gewöhnliche, seiner Geschwindigkeit proportionale Kraft $-\frac{\varepsilon}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]$. Während diese Kraft stets senkrecht zur Bewegungsrichtung des Elektrons steht, also keine Arbeit an demselben leisten kann, bringt die bei der Entstehung des Feldes vorhandene elektrische Kraft wohl einen Energieaustausch hervor, und sie vermag eventuell Geschwindigkeit und Abstand des Teilchens zu ändern. Die bei der Entstehung des Feldes an den Elektronen geleistete Arbeit muß sich natürlich im Modell in potentieller oder kinetischer Form wieder vorfinden. Einer Änderung der potentiellen Energie würde eine solche des Bahnradius, einer Änderung der kinetischen Energie eine solche der Umlaufsgeschwindigkeit entsprechen. Diese Änderungen, die a_0 und ω_0 bei der Magnetisierung eventuell erfahren, können nur klein sein. Wir machen dementsprechend, ausgehend von den Werten a_0 und ω_0 des völlig ungestörten Modells, die Ansätze:

$$a = a_0 + \delta a, \qquad \omega = \omega_0 + \delta\omega. \tag{7}$$

Es handelt sich nun darum, δa und $d\omega$ als Funktion des Magnetfeldes $\mathfrak{H}$ zu berechnen.

Mit dem Entstehen von $\mathfrak{H}$ ist nach dem Induktionsgesetz das elektrische Feld $\mathfrak{E}$ durch die Gleichung

$$-\dot{\mathfrak{H}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E} \tag{8}$$

verknüpft. Wie schon bemerkt, leistet dieses elektrische Feld am Elektron eine Arbeit, die wir leicht berechnen können.

Wir wissen zwar, daß sich wegen der außerordentlichen Kleinheit dieser Kräfte die Bahn des Elektrons während des Entstehens von $\mathfrak{H}$ nur sehr wenig ändern kann; aber wir können z. B. nicht von vornherein sagen, ob das Elektron sich nicht ausgehend vom Kreis a_0 auf einer Spirale nach dem Kreis $a = a_0 + \delta a$ hin bewegt. Wenn $\mathfrak{H}$ sich jedoch nur äußerst langsam ändert, dann ist die Änderung, die a bei einem einzigen Umlaufe[1]) des Elektrons erfährt, so klein, daß wir die Bahn bei diesem einen Umlauf bis auf einen zu vernachlässigenden Fehler als kreisförmig betrachten dürfen. Mit Hilfe des Stokesschen Satzes

$$\oint \mathfrak{E}_s ds = \int \mathrm{rot}_n \mathfrak{E} \cdot df \tag{9}$$

können wir leicht die Arbeit, die an einem Elektron unseres Modells beim einmaligen Umlaufen geleistet wird, durch bekannte Größen ausdrücken. Es ist diese nämlich

$$\Delta A = -\varepsilon \oint \mathfrak{E}_s ds. \tag{10}$$

Wegen (8) und (9) können wir dafür setzen:

$$\Delta A = \frac{\varepsilon}{c} \int \dot{\mathfrak{H}}_n df, \tag{11}$$

wobei das Integral über die Kreisfläche der Elektronenbahn zu erstrecken ist. Wegen der sehr kleinen Ausdehnung des Modells dürfen wir $\dot{\mathfrak{H}}_n$ längs der Kreisfläche als konstant betrachten und dafür seinen Wert $\dot{\mathfrak{H}}_n^0$ im Mittelpunkt des Kreises setzen. df können wir durch $\frac{df}{dt} \cdot dt$ ersetzen. $\frac{df}{dt}$ ist die Flächengeschwindigkeit des Elektrons, und es ist nach dem oben Gesagten, bis auf Größen höherer Ordnung:

$$df = \frac{1}{2} a^2{}_0 \, \omega_0 \, dt.$$

Dadurch geht (11) über in

$$\Delta A = \frac{\varepsilon}{2c} \cdot a_0{}^2 \omega_0 \cdot \int \dot{\mathfrak{H}}_n{}^0 \cdot dt.$$

Integriert:

$$\Delta A = \frac{\varepsilon}{2c} a_0{}^2 \omega_0 \cdot \Delta \mathfrak{H}_n{}^0.$$

1) Die Frequenz ω_0 beträgt, wie aus P. Debyes Dispersionsrechnung hervorgeht, $\sim 10^{16}$ sec^{-1}.

Genau dieselbe Gleichung gilt natürlich auch für das zweite Elektron. Sie gilt auch dann noch, wenn wir sie auf beliebig viele Umläufe beziehen, und lautet dann:

$$A = \frac{\varepsilon}{2c} a_0^2 \omega_0 \cdot \mathfrak{H}_n^0. \tag{12}$$

Wir finden diese dem Elektron zugeführte Arbeit im Modell zurück in potentieller und kinetischer Form. Bezeichnen wir die potentielle Energie des Elektrons in bezug auf das Modell mit U, seine kinetische Energie mit $\frac{1}{2}\mu a^2 \omega^2$, dann muß die Gleichung

$$A = \delta U + \delta\left(\frac{1}{2}\mu a^2 \omega^2\right) \tag{13}$$

erfüllt sein.

Diese hat, wenn wir nur die Terme erster Ordnung beibehalten, folgende Gestalt:

$$\frac{\varepsilon}{2c} \cdot a_0^2 \omega_0 \mathfrak{H}_n = \left[\left(\frac{\delta U}{\delta a}\right)_{a=a_0} + \mu a_0 \omega_0^2\right] \cdot \delta a + \mu a_0^2 \omega_0 \delta\omega. \tag{14}$$

Es ist dies eine Gleichung zwischen den zwei zu bestimmenden Unbekannten δa und $\delta\omega$. Wir können uns aber leicht eine zweite verschaffen, wenn wir daran denken, daß das Elektron in der neuen Kreisbahn, die es unter dem Einflusse von $\mathfrak{H}$ angenommen hat, wiederum im Gleichgewicht sein muß. Bei Abwesenheit des Magnetfeldes lautet die Gleichgewichtsbedingung (2), in die wir auch U einführen wollen:

$$\mu a_0 \omega_0^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_{\omega=a_0} = 0. \tag{15}$$

Sie geht jetzt, wo wir ein konstantes Magnetfeld $\mathfrak{H}_n$, den Radius $a_0 + \delta a$ und die Winkelgeschwindigkeit $\omega_0 + \delta\omega$ haben, über in

$$\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}\right)_{a=a_0} - \mu\omega_0^2\right] \cdot \delta a = 2\mu a_0 \delta\omega - \frac{\varepsilon}{c} a_0 \omega_0 \mathfrak{H}_n. \tag{16}$$

Aus (14) und (16) folgt unter Berücksichtigung von (15)

$$\left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial a^2}\right)_{a=a_0} - 3\mu\omega_0^2\right] \cdot \delta a = 0. \tag{17}$$

Diese beiden Gleichungen liefern:

$$\delta a = 0, \qquad \delta\omega = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{H}_n}{2c}. \tag{18}$$

Damit haben wir die gesuchten Veränderungen, die unser Modell in einem parallel zu seiner Achse gerichteten Magnetfeld

erfährt, gefunden. Wir sehen, daß der Bahnradius des Modells völlig ungeändert bleibt, während die Umlaufsgeschwindigkeit vom Magnetfelde abhängig ist.

Wenn das entstehende Magnetfeld nicht parallel der Molekülachse gerichtet ist, bleibt der Vorgang doch im wesentlichen derselbe. Die Elektronen erleiden jetzt außer den säkularen (von der Periode unabhängigen) Störungen noch periodische Störungen ihrer Bahn, denn die Kraft $-\frac{\varepsilon}{c}\left[\mathfrak{v},\mathfrak{H}\right]$ ist nun nicht mehr radial gerichtet. Sie pendeln etwas um ihre frühere ungestörte Kreisbahn. Bei der Berechnung der Induktionsarbeit (und nur diese ist schließlich für die Änderung von ω maßgebend) können wir die oben ausgeführte Rechnung als genügende Näherung betrachten. Wir

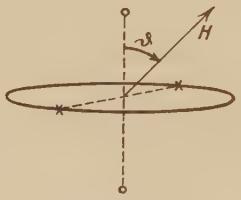

Fig. 2.

erhalten so für die säkularen Störungen, die ja allein einen wesentlichen Einfluß auf das beobachtbare Verhalten des Wasserstoffgases haben können, bei beliebigem Magnetfeld wieder die Gleichungen:

$$\delta a = 0, \qquad \delta \omega = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{\mathfrak{H}_n}{2c}.$$

Wenn die Modellachse mit der Richtung des Magnetfeldes den $\sphericalangle \vartheta$ einschließt, so können wir für $\delta\omega$ schreiben:

$$\delta \omega = \frac{\varepsilon}{\mu} \cdot \frac{|\mathfrak{H}|}{2c} \cdot \cos\vartheta.$$

Unser Wasserstoffgas besteht also nach Anlegen eines Magnetfeldes aus lauter Modellen, deren Elektronen kleine Pendelungen um die ungestörte Kreisbahn a_0 ausführen mit Frequenzen, die abhängen von der Lage der Modelle gegen die Richtung des Magnetfeldes.

Die Umlaufszahl eines Modells, dessen Achse mit $\mathfrak{H}$ den $\sphericalangle \vartheta$ bildet, ist gegeben durch

$$\omega = \omega_0 + \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{|\mathfrak{H}|}{2c} \cdot \cos\vartheta. \tag{19}$$

Wir schreiben dafür abgekürzt:

$$\omega = \omega_0 (1 + r\cos\vartheta). \tag{20}$$

Dann hat r den Wert:

$$r = \frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{|\mathfrak{H}|}{2\omega_0 c}. \tag{21}$$

(Da wir später Taylorentwicklungen nach r vornehmen wollen, so können wir vielleicht gleich an dieser Stelle zeigen, daß r klein gegen 1 ist. P. Debye berechnete aus seiner Dispersionsformel für ω_0 den Wert: $\omega_0 \sim 4 \cdot 10^{16}$; die stärksten Magnetfelder sind von der Größenordnung 10^5 Gauß, für $\frac{\varepsilon}{\mu}$ und c haben wir zu setzen

$$\frac{\varepsilon}{\mu} \sim 5 \cdot 10^{17}, \quad c = 3 \cdot 10^{10}.$$

Damit erhalten wir für r einen Wert $< 10^{-4}$. r ist also klein gegen 1).

Da wir jetzt wissen, wie unser Modell sich beim Entstehen eines Magnetfeldes verhält, können wir daran gehen, die Bahn der Elektronen bei Vorhandensein des Magnetfeldes und auch anderer störender Kräfte zu untersuchen. Dabei brauchen wir auf die Vorgänge, die beim Entstehen des Feldes stattgefunden haben, nicht mehr genauer einzugehen. Wir werden denselben bei den später auszuführenden näherungsweisen Berechnungen der Störungen einfach dadurch Rechnung tragen, daß wir für ein bestimmt gegen $\mathfrak{H}$ orientiertes Modell das ihm zukommende $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ als Umlaufszahl nehmen.

§ 5. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen für die Elektronen des Modells bei beliebigen störenden Kräften.

Wenn wir das in einem konstanten Magnetfeld befindliche Modell außer der Kraft $\mathfrak{H}$ noch andern störenden Kräften unterwerfen (die so beschaffen sind, daß wir die Kerne des Modells wiederum als ruhend betrachten dürfen), dann wird die Elektronen-

bahn gewisse Verzerrungen erfahren, die wir dadurch berechnen können, daß wir die mechanischen Bewegungsgleichungen für die Elektronen aufstellen und lösen.

Um die Bewegungsgleichungen der Elektronen aufschreiben zu können, haben wir ein passendes Koordinatensystem zu wählen. Wir wollen die Verbindungsgerade der Kerne als z-Achse betrachten, und zwar zählen wir z vom Mittelpunkte des Modells aus nach derjenigen Seite des Modells positiv, von der aus gesehen die Elektronen entgegen dem Uhrzeiger umlaufen. In der zur Verbindungslinie der Kerne mittelsenkrechten Ebene führen wir Polarkoordinaten r, φ ein Die Koordinaten des ersten Elektrons sind dann bei beliebiger Lage desselben r_1 φ_1 z_1, diejenigen des zweiten r_2 φ_2 z_2. Das völlig ungestörte Modell des § 3 z. B. wäre in diesem Koordinatensystem charakterisiert durch:

$$r_1 = r_2 = a_0\,, \qquad \begin{matrix} \varphi_1 = \omega_0 t \\ \varphi_2 = \omega_0 t + \pi \end{matrix}\,, \qquad z_1 = z_2 = 0\,. \tag{22}$$

Die kinetische Energie des ersten, bzw. zweiten Elektrons drückt sich in diesen Koordinaten folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\mu}{2}(\dot r_1^{\,2} + r_1^{\,2}\dot\varphi_1^{\,2} + \dot z_1^{\,2}) \\ T_2 &= \frac{\mu}{2}(\dot r_2^{\,2} + r_2^{\,2}\dot\varphi_2^{\,2} + \dot z_2^{\,2}), \end{aligned} \tag{23}$$

und die zu den Lagekoordinaten r, φ, z gehörigen Impulskoordinaten ϱ, ψ, ζ sind sonach definiert durch:

$$\begin{matrix} \varrho_1 = \mu \dot r_1\,, & \psi_1 = \mu r_1^{\,2}\dot\varphi_1\,, & \zeta_1 = \mu \dot z_1 \\ \varrho_2 = \mu \dot r_2\,, & \psi_2 = \mu r_2^{\,2}\dot\varphi_2\,, & \zeta_2 = \mu \dot z_2\,. \end{matrix} \tag{24}$$

In diesen Impulskoordinaten ergeben sich für die kinetische Energie die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2\mu}\left(\varrho_1^{\,2} + \frac{\psi_1^{\,2}}{r_1^{\,2}} + \zeta_1^{\,2}\right), \\ T_2 &= \frac{1}{2\mu}\left(\varrho_2^{\,2} + \frac{\psi_2^{\,2}}{r_2^{\,2}} + \zeta_2^{\,2}\right). \end{aligned} \tag{25}$$

Wir wollen die potentielle Energie des Systems U, die auf die Elektronen in Richtung der eingeführten Koordinaten wirkenden Kräfte mit

$$F_{r_1} \quad F_{\varphi_1} \quad F_{z_1}$$

bzw.

$$F_{r_2} \quad F_{\varphi_2} \quad F_{z_2}$$

bezeichnen. Dann lauten die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen für die Elektronenbewegung folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
&\mu\frac{dr_1}{dt}=\varrho_1\,, && -\frac{d\varrho_1}{dt}=-\frac{1}{\mu}\frac{\psi_1^{\,2}}{r_1^{\,3}}+\frac{\partial U}{\partial r_1}-F_{r_1}\,,\\
&\mu\frac{d\varphi_1}{dt}=\frac{\psi_1}{r_1^{\,2}}\,, && -\frac{d\psi_1}{dt}=\frac{\partial U}{\partial\varphi_1}-r_1F_{\varphi_1}\,,\\
&\mu\frac{dz_1}{dt}=\zeta_1\,, && -\frac{d\zeta_1}{dt}=\frac{\partial U}{\partial z_1}-F_{z_1}\,,\\
&\mu\frac{dr_2}{dt}=\varrho_2\,, && -\frac{d\varrho_2}{dt}=-\frac{1}{\mu}\frac{\psi_2^{\,2}}{r_2^{\,2}}+\frac{\partial U}{\partial r_2}-F_{r_2}\,,\\
&\mu\frac{d\varphi_2}{dt}=\frac{\psi_2}{r_2^{\,2}}\,, && -\frac{d\psi_2}{dt}=\frac{\partial U}{\partial\varphi_2}-r_2F_{\varphi_2}\,,\\
&\mu\frac{dz_2}{dt}=\zeta_2\,, && -\frac{d\zeta_2}{dt}=\frac{\partial U}{\partial z_2}-F_{z_2}\,.
\end{aligned}\tag{26}$$

Als störende Kräfte kommen in unserem Falle in Betracht:

1. ein äußeres elektrisches Feld $\mathfrak{E}$,
2. ein äußeres magnetisches Feld $\mathfrak{H}$.

Das Elektron erfährt zufolge $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Kraft:

$$F=-\varepsilon\left\{\mathfrak{E}+\frac{1}{c}\left[\mathfrak{v},\mathfrak{H}\right]\right\}.\tag{27}$$

Es ist zweckmäßig, in der $r-\varphi$-Ebene außer den Polar- noch rechtwinklige $x-y$-Koordinaten einzuführen. Wenn dann die rechtwinkligen Komponenten der störenden Feldstärken

$$\mathfrak{E}_x,\ \mathfrak{E}_y,\ \mathfrak{E}_z,$$
$$\mathfrak{H}_x,\ \mathfrak{H}_y,\ \mathfrak{H}_z$$

bekannt sind, lassen sich die Polarkomponenten sehr einfach in denselben ausdrücken. Man erhält so für die Komponenten der störenden Kraft in bezug auf das $x-\varphi-z$-System die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
F_{r_1}=-\varepsilon\Big\{&\mathfrak{E}_x\cos\varphi_1+\mathfrak{E}_y\sin\varphi_1+\frac{1}{c}\Big[r_1\dot{\varphi}_1\,\mathfrak{H}_z\\
&-\dot{z}_1(-\mathfrak{H}_x\sin\varphi_1+\mathfrak{H}_y\cos\varphi_1)\Big]\Big\},\\
F_{\varphi_1}=-\varepsilon\Big\{&-\mathfrak{E}_x\sin\varphi_1+\mathfrak{E}_y\cos\varphi_1+\frac{1}{c}\Big[\dot{z}_1(\mathfrak{H}_x\cos\varphi_1\\
&+\mathfrak{H}_y\sin\varphi_1)-\dot{r}_1\,\mathfrak{H}_z\Big]\Big\},\\
F_{z_1}=-\varepsilon\Big\{&\mathfrak{E}_z+\frac{1}{c}\Big[\dot{r}_1(-\mathfrak{H}_x\sin\varphi_1+\mathfrak{H}_y\cos\varphi_1)\\
&-r_1\dot{\varphi}_1(\mathfrak{H}_x\cos\varphi_1+\mathfrak{H}_y\sin\varphi_1)\Big]\Big\}.
\end{aligned}\tag{28}$$

Ebenso für das zweite Elektron:

$$F_{r_2} = -\varepsilon\Big\{\mathfrak{E}_x\cos\varphi_2 + \mathfrak{E}_y\sin\varphi_2 + \frac{1}{c}\Big[r_2\dot{\varphi}_2\mathfrak{H}_x - \dot{z}_2(-\mathfrak{H}_x\sin\varphi_2 + \mathfrak{H}_y\cos\varphi_2)\Big]\Big\},$$

$$F_{\varphi_2} = -\varepsilon\Big\{-\mathfrak{E}_x\sin\varphi_2 + \mathfrak{E}_y\cos\varphi_2 + \frac{1}{c}\Big[\dot{z}_2(\mathfrak{H}_x\cos\varphi_2 + \mathfrak{H}_y\sin\varphi_2) - \dot{r}_2\mathfrak{H}_z\Big]\Big\}, \qquad (28\,a)$$

$$F_{z_2} = -\varepsilon\Big\{\mathfrak{E}_z + \frac{1}{c}\Big[\dot{r}_2(-\mathfrak{H}_x\sin\varphi_2 + \mathfrak{H}_y\cos\varphi_2) - r_2\dot{\varphi}_2(\mathfrak{H}_x\cos\varphi_2 + \mathfrak{H}_y\sin\varphi_2)\Big]\Big\}.$$

Setzen wir diese Werte für die störenden Kräfte, und außerdem den in $r_1 \ldots \varphi_2$ explizit ausgerechneten Ausdruck für U in die Bewegungsgleichungen (26) ein, so haben wir die Gleichungen, die die Bewegung der Elektronen in unserm Modell vollständig beherrschen.

Es ist natürlich nicht daran zu denken, diese Gleichungen streng zu lösen. Wir müssen uns mit einer näherungsweisen Lösung, die für unsere Zwecke aber völlig hinreichende Genauigkeit gibt, begnügen.

Ehe wir zur Dispersionsrechnung schreiten, schalten wir einen Zwischenparagraphen ein, in dem auf Grund der jetzt entwickelten allgemeinen Bewegungsgleichungen der Einfluß eines entstehenden Magnetfeldes erneut berechnet, und die Richtigkeit der Überlegungen des § 4 bestätigt wird.

§ 6. Erneute Berechnung der säkularen Störungen beim Entstehen eines Magnetfeldes.

Wir wollen zunächst den in § 4 betrachteten Vorgang der Entstehung eines beliebigen Magnetfeldes in schönerer Form auf Grund der eben aufgestellten Bewegungsgleichungen nochmals verfolgen, besonders auch deshalb, weil die zu befolgende Methode, wie leicht ersichtlich, sich ohne weiteres auf kompliziertere Rutherfordsche Modelle übertragen läßt. Es handelt sich natürlich, weil ja die Gleichungen in aller Strenge nicht lösbar sind,

auch hier um eine näherungsweise Berechnung der Veränderungen, die das Modell bei der Entstehung eines Magnetfeldes erfährt.

Wir wissen, daß die beim Entstehen von $\mathfrak{H}$ vorhandenen elektromagnetischen Kräfte nur kleine Störungen der Kreisbahn hervorbringen können. Wenn wir nun diese kleinen Abweichungen der Koordinaten und Impulse von ihren Werten im Falle der völlig ungestörten Bewegung des § 3 als neue Variabeln in unsere Gleichungen einführen und sie als kleine Größen erster Ordnung behandeln, dann gehen die Gleichungen (26) in Differentialgleichungen erster Ordnung über, deren Lösung uns keine Mühe macht.

Durch die 12 Gleichungen

$$\begin{array}{lll} r_1 = a_0 + R_1, & \varphi_1 = \alpha + \omega_0 t + \Phi_1, & z_1 = Z_1, \\ r_2 = a_0 + R_2, & \varphi_2 = \alpha + \omega_0 t + \Phi_2, & z_2 = Z_2, \\ \varrho_1 = P_1, & \psi_1 = f_0 + \Psi_1, & \zeta_1 = Z_1, \\ \varrho_2 = P_2, & \psi_2 = f_0 + \Psi_2, & \zeta_2 = Z_2 \end{array} \tag{29}$$

führen wir die kleinen Störungen $R_1 \cdots Z_2$ ein, die nun unsere neuen Unbekannten bilden. Wenn wir sie sämtlich gleich Null setzen, so erhalten wir die völlig ungestörte Bewegung zurück. Sie bildet also den Ausgangspunkt für diese Störungsrechnung. α ist der Phasenwinkel des ersten Elektrons zur Zeit $t = 0$ und mit

$$f_0 = \mu a_0^2 \omega_0$$

bezeichnen wir in Zukunft stets das Impulsmoment der völlig ungestörten Bewegung. Um unsere Differentialgleichungen in lineare zu verwandeln, müssen wir die in denselben vorkommenden Größen $\frac{\psi}{r^2}$, $\frac{\psi^2}{r^3}$ und U ebenfalls in den neuen Variabeln $R_1 \cdots Z_2$ linear ausdrücken. Für die ersten beiden Größen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{r^2} &= \frac{f_0 + \Psi}{(a_0 + R)^2} = \frac{f_0}{a_0^2} + \frac{f_0}{a_0^2}\left[\frac{\Psi}{f_0} - 2\frac{R}{a_0}\right], \\ \frac{\psi^2}{r^3} &= \frac{(f_0 + \Psi)^2}{(a_0 + R)^3} = \frac{f_0^2}{a_0^3} + \frac{f_0^2}{a_0^3}\left[\frac{2\Psi}{f_0} - 3\frac{R}{a_0}\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Um die potentielle Energie U zu berechnen, denkt man sich das gestörte Modell in einem bestimmten Augenblick, z. B. $t = 0$ sukzessive aufgebaut. Zuerst werden die beiden Kerne an ihre festen Plätze $z = \pm d_0$ auf der z-Achse gebracht und die gegenseitige

potentielle Energie derselben aufgeschrieben. Dann setzt man ein Elektron an die Stelle

$$r_1 = a_0 + R_1, \quad \varphi_1 = \alpha + \Phi_1, \quad z_1 = Z_1$$

und berechnet seine potentielle Energie in bezug auf die Kerne. Fügt man schließlich das zweite Elektron im Punkte

$$r_2 = a_0 + R_2, \quad \varphi_2 = \alpha + \Phi_2, \quad z_2 = Z_2$$

hinzu, so ist damit U gefunden. Diese Rechnung gibt, wenn überall $\frac{d_0}{a_0} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ gesetzt wird, folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} U = \frac{\varepsilon^2}{a_0^2}\Big\{ & \left(\frac{1}{2} - 2\sqrt{3}\right) + \frac{3\sqrt{3}-1}{4} \cdot \frac{R_1 + R_2}{a_0} \\ & + \frac{1}{16}\left[2\left(\frac{R_1 + R_2}{a_0}\right)^2 + (\Phi_1 - \Phi_2)^2 - \left(\frac{Z_1 - Z_2}{a_0}\right)^2 \right] \\ & - \frac{1}{16}\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\left(5\,\frac{R_1^2}{a_0^2} - \frac{Z_1^2}{a_0^2}\right) + \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(5\,\frac{R_2^2}{a_0^2} - \frac{Z_2^2}{a_0^2}\right)\right]\Big\}. \end{aligned} \tag{31}$$

Konsequenterweise müssen wir auch die Ausdrücke für die Kraftkomponenten $F_{r_1} \cdots F_{z_2}$ in derselben Weise nähern. Da $\mathfrak{E}$ und $\frac{1}{c}[\mathfrak{v}, \mathfrak{H}]$ als von erster Ordnung klein anzusehen sind, erhalten wir aus (28):

$$\begin{aligned} F_{r_1} &= -\varepsilon\left\{ \mathfrak{E}_{x_1} \cos(\alpha + \omega_0 t) + \mathfrak{E}_{y_1} \sin(\alpha + \omega_0 t) + \frac{a_0 \omega_0}{c}\,\mathfrak{H}_{z_1} \right\}, \\ F_{\varphi_1} &= -\varepsilon\left\{ -\mathfrak{E}_{x_1} \sin(\alpha + \omega_0 t) + \mathfrak{E}_{y_1} \cos(\alpha + \omega_0 t)\right\}, \\ F_{z_1} &= -\varepsilon\left\{ \mathfrak{E}_{z_1} - \frac{a_0 \omega_0}{c}\left[\mathfrak{H}_{x_1} \cos(\alpha + \omega_0 t) + \mathfrak{H}_{y_1} \sin(\alpha + \omega_0 t)\right]\right\}, \\ F_{r_2} &= -\varepsilon\left\{ -\mathfrak{E}_{x_2} \cos(\alpha + \omega_0 t) - \mathfrak{E}_{y_2} \sin(\alpha + \omega_0 t) + \frac{a_0 \omega_0}{c}\,\mathfrak{H}_{z_2} \right\}, \\ F_{\varphi_2} &= -\varepsilon\left\{ \mathfrak{E}_{x_2} \sin(\alpha + \omega_0 t) - \mathfrak{E}_{y_2} \cos(\alpha + \omega_0 t)\right\}, \\ F_{z_2} &= -\varepsilon\left\{ \mathfrak{E}_{z_2} + \frac{a_0 \omega_0}{c}\left[\mathfrak{H}_{x_2} \cos(\alpha + \omega_0 t) + \mathfrak{H}_{y_2} \sin(\alpha + \omega_0 t)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{32}$$

Weil die äußeren Felder innerhalb der kleinen Dimensionen unseres Modells sich nur sehr wenig ändern, können wir uns mit einer frühzeitig abgebrochenen Reihenentwicklung für dieselben begnügen. Wir setzen, ausgehend vom Mittelpunkt des Modells, für die Feldstärken am Orte x, y, z des Elektrons:

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_x &= \mathfrak{E}_x^0 + x\frac{\partial \mathfrak{E}_x^0}{\partial x} + y\frac{\partial \mathfrak{E}_x^0}{\partial y} + z\frac{\partial \mathfrak{E}_x^0}{\partial z},\\ \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}_x^0 + x\frac{\partial \mathfrak{H}_x^0}{\partial x} + y\frac{\partial \mathfrak{H}_x^0}{\partial y} + z\frac{\partial \mathfrak{H}_x^0}{\partial z}.\end{aligned} \tag{33}$$

Setzen wir hierin noch

$$x = r\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad y = r\sin(\omega_0 t + \alpha),$$

und substituieren wir diese Werte in (32), so erhalten wir die störenden Kräfte F als Funktionen der Zeit. Und zwar werden sie wegen der Näherungen (33) durch abgebrochene Fourierentwicklungen dargestellt.

Wie schon in § 4 bemerkt, sind für uns nur die säkularen Störungen von Interesse. Solche können, da die Perioden ω_0 und $2\omega_0$ der störenden Kräfte nicht übereinstimmen mit irgendeiner Eigenperiode unseres Systems, nur hervorgerufen werden durch die konstanten Glieder jener Kräfte.

Diese sind:

$$\begin{aligned}F_{r_1} = F_{r_2} &= -\varepsilon\left\{\frac{a_0}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{E}_x^0}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{E}_y^0}{\partial y}\right] + \frac{a_0\omega_0}{c}\mathfrak{H}_z^0\right\},\\ F_{\varphi_1} = F_{\varphi_2} &= -\varepsilon\cdot\frac{a_0}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{E}_y^0}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{E}_x^0}{\partial y}\right],\\ F_{z_1} = F_{z_2} &= -\varepsilon\left\{\mathfrak{E}_z^0 - \frac{a_0\omega_0}{c}\cdot\frac{a_0}{2}\left[\frac{\partial \mathfrak{H}_x^0}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{H}_y^0}{\partial y}\right]\right\}.\end{aligned} \tag{34}$$

Berücksichtigt man noch die Gleichungen des elektromagnetischen Feldes:

$$-\dot{\mathfrak{H}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}, \quad \mathrm{div}\,\mathfrak{E} = 0, \quad \mathrm{div}\,\mathfrak{H} = 0,$$

dann nehmen die störenden Kräfte schließlich die einfache Form an:

$$\begin{aligned}F_{r_1} = F_{r_2} &= -\varepsilon\left\{-\frac{a_0}{2}\frac{\partial \mathfrak{E}_z^0}{\partial z} + \frac{a_0\omega_0}{c}\mathfrak{H}_z^0\right\},\\ F_{\varphi_1} = F_{\varphi_2} &= -\varepsilon\frac{a_0}{2c}\cdot\frac{d}{dt}\mathfrak{H}_z^0,\\ F_{z_1} = F_{z_2} &= -\varepsilon\left\{\mathfrak{E}_z^0 + \frac{a_0^2\omega_0}{2c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{H}_z^0}{\partial z}\right\}.\end{aligned} \tag{35}$$

Durch diese Näherungen gehen unsere Störungsgleichungen (26) über in:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{R_1}{a_0} &= \frac{P_1}{\mu a_0\omega_0}, \qquad \frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{R_2}{a_0} = \frac{P_2}{\mu a_0\omega_0},\\ \frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\Phi_1 &= \frac{\Psi_1}{f_0} - \frac{2R_1}{a_0}, \qquad \frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\Phi_2 = \frac{\Psi_2}{f_0} - \frac{2R_2}{a_0},\\ \frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_1}{a_0} &= \frac{Z_1}{\mu a_0\omega_0}, \qquad \frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_2}{a_0} = \frac{Z_2}{\mu a_0\omega_0},\end{aligned} \tag{36}$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{P_1}{\mu a_0 \omega_0} = \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{R_1}{a_0} + \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\cdot\frac{R_2}{a_0} - 2\frac{\Psi_1}{f_0}$$
$$-\frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2}\left\{\frac{a_0}{2}\cdot\frac{\partial \mathfrak{E}_z^0}{\partial t} - \frac{a_0\omega_0}{c}\mathfrak{H}_z^0\right\},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{P_2}{\mu a_0 \omega_0} = \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{R_2}{a_0} + \frac{1}{3\sqrt{3}-1}\cdot\frac{R_1}{a_0} - 2\frac{\Psi_2}{f_0}$$
$$-\frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2}\left\{\frac{a_0}{2}\frac{\partial \mathfrak{E}_z^0}{\partial x} - \frac{a_0\omega_0}{c}\mathfrak{H}_z^0\right\},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{\Psi_1}{f_0} = \frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}(\Phi_1-\Phi_2) - \frac{\varepsilon}{\mu a_0\omega_0^2}\frac{a_0}{2c}\frac{d}{dt}\mathfrak{H}_z^0, \qquad (36a)$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{\Psi_2}{f_0} = \frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}(\Phi_2-\Phi_1) - \frac{\varepsilon}{\mu a_0\omega_0^2}\frac{a_0}{2c}\frac{d}{dt}\mathfrak{H}_z^0,$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_1}{\mu a_0 \omega_0} = \frac{3\sqrt{3}-2}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_1}{a_0} + \frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_2}{a_0}$$
$$-\frac{\varepsilon}{\mu a_0\omega_0^2}\left\{\mathfrak{E}_z^0 + \frac{a_0^2\omega_0}{2c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{H}_z^0}{\partial t}\right\},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_2}{\mu a_0 \omega_0} = \frac{3\sqrt{3}-2}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_2}{a_0} + \frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_1}{a_0}$$
$$-\frac{\varepsilon}{\mu a_0\omega_0^2}\left\{\mathfrak{E}_z^0 + \frac{a_0^2\omega_0}{2c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial x}\right\}.$$

Wir lösen diese Gleichungen nicht nach den einzelnen Werten R_1, R_2, $\cdots$ auf, sondern wir bestimmen einmal die Differenzen

$$R_1 - R_2, \quad \Phi_1 - \Phi_2, \quad Z_1 - Z_2$$

und dann die Summen

$$R_1 + R_2, \quad \Phi_1 + \Phi_2, \quad Z_1 + Z_2.$$

Die Differentialgleichungen für die Differenzen sind genau dieselben, ob störende Kräfte da sind oder nicht. Die störenden Kräfte haben also auf

$$R_1 - R_2, \quad \Phi_1 - \Phi_2, \quad Z_1 - Z_2$$

keinen Einfluß. Da zur Zeit vor dem Vorhandensein der störenden Kräfte

$$\begin{array}{lll} P_1 = P_2 & \Psi_1 = \Psi_2 & Z_1 = Z_2 \\ R_1 = R_2 & \Phi_1 = \Phi_2 & Z_1 = Z_2 \end{array} \qquad (37)$$

war, so muß dies dauernd so bleiben. Wenn wir die Indizes 1 und 2 jetzt weglassen, erhalten wir die folgenden Gleichungen:

1. Für R und Φ:

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{R}{a_0} = \frac{P}{\mu a_0 \omega_0},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{P}{\mu a_0 \omega_0} = \frac{21\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{R}{a_0} - \frac{2\Psi}{f_0} - \frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2}\left\{\frac{a_0}{2}\frac{\partial \mathfrak{E}_z^0}{\partial t} - \frac{a_0 \omega_0}{c}\mathfrak{H}_z^0\right\},$$

$$\frac{1}{\omega^0}\frac{d}{dt}\Phi = \frac{\Psi}{f_0} - 2\frac{R}{a_0}, \tag{38}$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{\Psi}{f_0} = -\frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2}\frac{a_0}{2c}\frac{d}{dt}\mathfrak{H}_z^0,$$

2. Für Z:

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z}{a_0} = \frac{Z}{\mu a_0 \omega_0},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z}{\mu a_0 \omega_0} = \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{Z}{a_0} + \frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2}\left\{\mathfrak{E}_z^0 + \frac{a_0^2 \omega_0}{2c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z^0}{\partial z}\right\}.$$

Die Differentialgleichungen für Ψ können wir sofort nach t integrieren und finden:

$$\frac{\Psi}{f_0} = \frac{1}{\mu \omega_0}\cdot\frac{\varepsilon}{2c}\mathfrak{H}_z^0 + \text{konst.} \tag{39}$$

Die Integrationskonstante ergibt sich aus der Bedingung, daß im feldlosen Zustande $\Psi = 0$ sein muß.

Unter Berücksichtigung dieses Wertes für Ψ erhalten wir zur Bestimmung von $\frac{R}{a_0}$:

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{P}{\mu a_0 \omega_0} = -\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{R}{a_0} = \frac{21\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{R}{a_0} - \frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega^2}\cdot\frac{a_0}{2}\cdot\frac{\partial \mathfrak{E}_z^0}{\partial z}.$$

Als Lösung kann man mit vollständig genügender Genauigkeit

$$\frac{R_0}{a_0} = \frac{4(3\sqrt{3}-1)}{21\sqrt{3}-4}\cdot\frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2}\cdot\frac{a_0}{2}\cdot\frac{\partial \mathfrak{E}_z^0}{\partial z} \tag{40}$$

setzen, denn da $\frac{\partial \mathfrak{E}_z^0}{\partial z}$ zeitlich ebenso langsam veränderlich ist wie $\mathfrak{H}$, kann bei sehr langsam wachsendem Magnetfeld der zweite Differentialquotient nach der Zeit unbedenklich gestrichen werden. Wenn das Feld $\mathfrak{H}$ konstant geworden ist, sind keine elektrischen Kräfte mehr vorhanden und es ist dann

$$\frac{R}{a_0} = 0 \qquad \text{(bei } \mathfrak{H} = \text{konst)}. \tag{41}$$

Für Z haben wir die Gleichung

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z}{\mu a_0\,\omega_0} = -\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{Z}{a_0} = \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{Z}{a_0} + \frac{\varepsilon}{\mu a_0\,\omega_0^2}\left\{\mathfrak{E}_z{}^0 + \frac{a_0\,\omega_0}{2c}\frac{\partial \mathfrak{H}_z}{\partial z}\right\}.$$

Wir finden aus dem eben erwähnten Grunde bei langsam wachsendem Magnetfeld als näherungsweise Lösung:

$$\frac{Z}{a_0} = -\frac{4(3\sqrt{3}-1)}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\varepsilon}{\mu a_0\,\omega_0^2}\left\{\mathfrak{E}_z{}^0 + \frac{a_0^2\,\omega_0}{2c}\cdot\frac{\partial \mathfrak{H}_z{}^0}{\partial z}\right\}. \tag{42}$$

Nach dem Konstantwerden des Feldes ist auch hier:

$$\frac{Z}{a_0} = 0 \qquad \text{(bei } \mathfrak{H} = \text{konst.)}. \tag{43}$$

Zusammenfassend können wir sagen, daß das Entstehen des Magnetfeldes (wenn wir nur die säkularen Störungen berücksichtigen) nur das Impulsmoment der umlaufenden Elektronen, nicht aber den Bahnradius verändert. Wir finden als neue Umlaufsfrequenz aus (39) und (41)

$$\omega = \frac{f_0 + \Psi}{\mu a_0^2} = \omega_0 + \frac{1}{2c}\cdot\frac{\varepsilon}{\mu}\cdot\mathfrak{H}_z,$$

also genau den Wert, den wir schon in § 4 abgeleitet haben.

§ 7. Die Störungsgleichungen im Falle einer Lichtwelle als störender Kraft.

Wenn das in einem konstanten Magnetfelde $\mathfrak{H}$ befindliche Modell von einer Lichtwelle getroffen wird, so erfährt es von der in der Welle schwingenden elektrischen Kraft $\mathfrak{E} = Ee^{ist}$ eine Störung. Um diese Störung zu berechnen, haben wir nur die störenden Kräfte F_1 und F_2 anzugeben, sie in unsere Störungsgleichungen einzusetzen und diese nach der in § 6 angegebenen Näherungsmethode zu lösen. Wir brauchen dabei die Entstehung des Magnetfeldes nicht nochmals zu verfolgen. Wir berücksichtigen die Vorgänge, die dabei stattgefunden haben, indem wir für die

Störungsrechnung ein Modell mit der Frequenz $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ und dem Radius a_0 als Ausgangspunkt wählen.

Wir definieren also die Störungen $R_1 \dots Z_2$ in diesem Falle durch die Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} r_1 = a_0 + R_1, & \varphi_1 = \alpha + \omega t + \Phi_1, & z_1 = Z_1, \\ r_2 = a_0 + R_2, & \varphi_2 = \alpha + \omega t + \pi + \Phi_2, & z_2 = Z_2, \\ \varrho_1 = P_1, & \psi_1 = f + \Psi_1, & \varrho_1 = Z_1, \\ \varrho_2 = P_2, & \psi_2 = f + \Psi_2, & \varrho_2 = Z_2. \end{array} \tag{44}$$

Wir haben dabei die Abkürzung

$$f = f_0 + \delta f = f_0 + \mu a_0^2 \delta\omega \tag{45}$$

eingeführt.

Für $\frac{\psi}{r^2}$ und $\frac{\psi^2}{r^3}$ setzen wir die genäherten Werte:

$$\begin{aligned} \frac{\psi}{r^2} &= \frac{f_0}{a_0^2} + \frac{f_0}{a_0^2}\left\{\frac{\Psi}{f_0} - 2\frac{R}{a_0} + \frac{\delta f}{f_0}\right\} \\ \frac{\psi^2}{r^3} &= \frac{f_0^2}{a_0^3} + \frac{f_0^2}{a_0^3}\left\{\frac{2\Psi}{f_0} - 3\frac{R}{a_0} + \frac{2\delta f}{f_0}\right\} \end{aligned} \tag{46}$$

Für U bleibt die Näherungsformel (31) bestehen, und für die Komponenten der störenden Kraft haben wir jetzt:

$$\begin{aligned} F_{r_1} &= -\varepsilon\left\{\mathfrak{E}_x \cos(\alpha + \omega t) + \mathfrak{E}_y \sin(\alpha + \omega t) + \frac{a_0\,\omega}{c}\mathfrak{H}_z\right\}, \\ F_{\varphi_1} &= -\varepsilon\left\{-\mathfrak{E}_x \sin(\alpha + \omega t) + \mathfrak{E}_y \cos(\alpha + \omega t)\right\}, \\ F_{z_1} &= -\varepsilon\left\{\mathfrak{E}_z - \frac{a_0\,\omega}{c}\left[\mathfrak{H}_x \cos(\alpha + \omega t) + \mathfrak{H}_y \sin(\alpha + \omega t)\right]\right\}, \\ F_{r_2} &= +\varepsilon\left\{\mathfrak{E}_x \cos(\alpha + \omega t) + \mathfrak{E}_y \sin(\alpha + \omega t) + \frac{a_0\,\omega}{c}\mathfrak{H}_z\right\}, \\ F_{\varphi_2} &= -\varepsilon\left\{-\mathfrak{E}_x \sin(\alpha + \omega t) + \mathfrak{E}_y \cos(\alpha + \omega t)\right\}, \\ F_{z_2} &= -\varepsilon\left\{\mathfrak{E}_z + \frac{a_0\,\omega}{c}\left[\mathfrak{H}_x \cos(\alpha + \omega t) + \mathfrak{H}_y \sin(\alpha + \omega t)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{47}$$

Setzen wir schließlich

$$\mathfrak{E}_x = Pe^{ist}, \qquad \mathfrak{E}_y = Qe^{ist}, \qquad \mathfrak{E}_z = Re^{ist},$$

und fassen wir, um statt der trigonometrischen überall Ex-

ponentialfunktionen zu bekommen, die komplexen Amplituden mit $\pm i$ zusammen

$$P + iQ = p, \qquad P - iQ = q, \tag{48}$$

dann erhalten wir für (47) die uns später bequemere Form:

$$\begin{aligned}
F_{r_1} &= -\frac{\varepsilon}{2}\left\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega t)} + p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega t)} + \frac{2a_0\omega}{c}\mathfrak{H}_z\right\},\\
F_{\varphi_1} &= -i\frac{\varepsilon}{2}\left\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega t)} - p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega t)}\right\},\\
F_{z_1} &= -\varepsilon\left\{R e^{ist} - \frac{a_0\omega}{c}\left[\mathfrak{H}_x\cos(\alpha+\omega t) + \mathfrak{H}_y\sin(\alpha+\omega t)\right]\right\},\\
F_{r_2} &= +\frac{\varepsilon}{2}\left\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega t)} + p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega t)} + \frac{2a_0\omega}{c}\mathfrak{H}_z\right\},\\
F_{\varphi_2} &= +i\frac{\varepsilon}{2}\left\{q e^{i\alpha} e^{i(s+\omega t)} - p e^{-i\alpha} e^{i(s-\omega t)}\right\},\\
F_{z_2} &= -\varepsilon\left\{R e^{ist} + \frac{a_0\omega}{c}\left[\mathfrak{H}_x\cos(\alpha+\omega t) + \mathfrak{H}_y\sin(\alpha+\omega t)\right]\right\}.
\end{aligned} \tag{49}$$

Wenn wir diese Näherungen in die allgemeinen Bewegungsgleichungen (26) einsetzen, so erhalten wir die 12 linearen Differentialgleichungen, aus denen wir die Unbekannten $R_1 \ldots Z_2$ bestimmen können. Sie lauten, wenn wir sie durch passende Division durch μ, a_0, ω_0 so schreiben, daß nur die dimensionslosen Variabeln:

$$\frac{R}{a_0}, \quad \boldsymbol{\Phi}, \quad \frac{Z}{a_0}, \quad \frac{\boldsymbol{P}}{\mu a_0\omega_0}, \quad \frac{\boldsymbol{\Psi}}{f_0}, \quad \frac{\boldsymbol{Z}}{\mu a_0\omega_0}$$

auftreten:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{R_1}{a_0} = \frac{P_1}{\mu a_0\omega_0}, \qquad \frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{R_2}{a_0} = \frac{P_2}{\mu a_0\omega_0},\\
&\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Phi}_1 = \left(-\frac{\delta\omega}{\omega_0} + \frac{\delta f}{f_0}\right) + \frac{\boldsymbol{\Psi}_1}{f_0} - \frac{2R_1}{a_0},\\
&\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Phi}_2 = \left(-\frac{\delta\omega}{\omega_0} + \frac{\delta f}{f_0}\right) + \frac{\boldsymbol{\Psi}_2}{f_0} - \frac{2R_2}{a_0},\\
&\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_1}{a_0} = \frac{Z_1}{\mu a_0\omega_0}, \qquad \frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_2}{a_0} = \frac{Z_2}{\mu a_0\omega_0}.
\end{aligned} \tag{50}$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{P_1}{\mu a_0\omega_0}=\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{R_1}{a_0}+\frac{1}{(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{R_2}{a_0}-2\frac{\Psi_1}{f_0}$$

$$-\left(\frac{2\delta f}{f_0}-\frac{1}{\omega_0 c}\cdot\frac{\varepsilon}{\mu}\mathfrak{H}_z\right)+\frac{\varepsilon}{2\mu a_0\omega_0^2}\left\{q e^{i\alpha}e^{i(s+\omega t)}+p e^{-i\alpha}e^{i(s-\omega t)}\right\},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{P_2}{\mu a_0\omega_0}=\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{R_2}{a_0}+\frac{1}{(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{R_1}{a_0}-2\frac{\Psi_2}{f_0}\Big\}$$

$$-\left(\frac{2\delta f}{f_0}-\frac{1}{\omega_0 c}\cdot\frac{\varepsilon}{\mu}\cdot\mathfrak{H}_z\right)-\frac{\varepsilon}{2\mu a_0\omega_0^2}\left\{q e^{i\alpha}e^{i(s+\omega t)}+p e^{-i\alpha}e^{i(s+\omega t)}\right\},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{\Psi_1}{f_0}=\frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}(\Phi_1-\Phi_2)+\frac{i\varepsilon}{2\mu a_0\omega_0^2}$$

$$\left\{q e^{i\alpha}e^{i(s+\omega t)}-p e^{-i\alpha}e^{i(s-\omega t)}\right\},\quad(50\,\mathrm{a})$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{\Psi_2}{f_0}=\frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}(\Phi_2-\Phi_1)-\frac{i\varepsilon}{2\mu a_0\omega_0^2}$$

$$\left\{q e^{i\alpha}e^{i(s+\omega t)}-p e^{-i\alpha}e^{i(s-\omega t)}\right\},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_1}{\mu a_0\omega_0}=\frac{3\sqrt{3}-2}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{Z_1}{a_0}+\frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_2}{a_0}+\frac{\varepsilon}{\mu a_0\omega_0^2}$$

$$\left\{Re^{ist}-\frac{a_0\omega_0}{c}\left[\mathfrak{H}_x\cos(\alpha+\omega t)+\mathfrak{H}_y\sin(\alpha+\omega t)\right]\right\},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_2}{\mu a_0\omega_0}=\frac{3\sqrt{3}-2}{4(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_2}{a_0}+\frac{1}{2(3\sqrt{3}-1)}\frac{Z_1}{a_0}+\frac{\varepsilon}{\mu a_0\omega_0^2}$$

$$\left\{Re^{ist}+\frac{a_0\omega_0}{c}\left[\mathfrak{H}_x\cos(\alpha+\omega t)+\mathfrak{H}_y\sin(\alpha+\omega t)\right]\right\}.$$

In den Gleichungen (50) können wir den Ausdruck $\left(-\frac{\delta\omega}{\omega_0}+\frac{\delta f}{f_0}\right)$ und in den Gleichungen (50a) ebenso $\left(\frac{2\delta f}{f_0}-\frac{1}{\omega_0 c}\frac{\varepsilon}{\mu}\mathfrak{H}_z\right)$ weglassen, denn diese Ausdrücke sind jederzeit gleich null. Sie drücken nur die uns schon bekannte Tatsache der im Magnetfeld vorhandenen Abweichung von ω_0 (siehe z. B. Gleichung (18))

$$\delta\omega=\frac{1}{2c}\cdot\frac{\varepsilon}{\mu}\mathfrak{H}_z$$

aus.

Bevor wir zur Lösung dieser Differentialgleichungen schreiten, wollen wir zeigen, daß es zur Kenntnis des optischen Verhaltens unseres Modells nicht nötig ist, die $R_1 \dots Z_2$ einzeln zu bestimmen, sondern daß es genügt, gewisse Verbindungen derselben zu kennen.

§ 8. Das elektrische Moment eines H_2-Moleküls.

Das optische Verhalten einer Substanz wird charakterisiert durch das elektrische Moment, das dieselbe unter dem Einflusse der elektrischen Kraft der erregenden Lichtwelle annimmt. Wir haben also vor allem für unser Modell dieses Moment zu berechnen. Im völlig ungestörten Zustand hat das Wasserstoffmodell wegen seiner vollkommenen Symmetrie kein Moment. Es ist für einen beliebigen Anfangspunkt

$$\Sigma e \cdot \mathfrak{r} = 0.$$

Wenn jedoch die beiden störenden Felder auf dasselbe einwirken, bekommt es ein elektrisches Moment $\mathfrak{M}$. Die Komponenten desselben in bezug auf die früher eingeführten Achsen berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \Sigma ex = -\varepsilon (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) \\ \mathfrak{M}_y &= \Sigma ey = -\varepsilon (r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2) \\ \mathfrak{M}_z &= \Sigma ez = -\varepsilon (z_1 + z_2). \end{aligned} \tag{51}$$

Wenn wir auch hier die Variabeln $R_1 \dots Z_2$ aus Gleichung (41) einführen, so finden wir die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= -\varepsilon a_0 \left\{ \frac{R_1 - R_2}{a_0} \cos(\alpha + \omega t) - (\Phi_1 - \Phi_2) \sin(\alpha + \omega t) \right\} \\ \mathfrak{M}_y &= -\varepsilon a_0 \left\{ \frac{R_1 - R_2}{a_0} \sin(\alpha + \omega t) + (\Phi_1 - \Phi_2) \cos(\alpha + \omega t) \right\} \\ \mathfrak{M}_z &= -\varepsilon a_0 \cdot \frac{Z_1 + Z_2}{a_0}. \end{aligned} \tag{51a}$$

Wesentlich ist, daß bei der Berechnung des Moments die Störungen $R_1 \dots Z_2$ nicht einzeln, sondern nur in den Verbindungen $\frac{R_1 - R_2}{a_0}$, $\Phi_1 - \Phi_2$, $\frac{Z_1 + Z_2}{a_0}$ auftreten. Wir brauchen sie daher auch nicht einzeln zu bestimmen. Wir werden unsere Störungsgleichungen durch passende Addition und Subtraktion so einrichten, daß in

denselben nur mehr diese Differenzen und Summen auftreten Aus (50) erhalten wir die 6 Differentialgleichungen:

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{R_1-R_2}{a_0}=\frac{P_1-P_2}{\mu a_0\omega_0},$$

$$\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}(\Phi_1-\Phi_2)=\frac{\Psi_1-\Psi_2}{f_0}-2\frac{R_1-R_2}{a_0},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{P_1-P_2}{\mu a_0\omega_0}=\frac{21\sqrt{3}-12}{4(2\sqrt{3}-3)}\frac{R_1-R_2}{a_0}-2\frac{\Psi_1-\Psi_2}{f_0}$$

$$-\frac{\varepsilon}{\mu a_0\omega_0{}^2}\left\{q\,e^{i\alpha}e^{i(s+\omega t)}-p\,e^{-i\alpha}e^{+i(s-\omega t)}\right\}, \tag{52}$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{\Psi_1-\Psi_2}{f_0}=\frac{1}{3\sqrt{3}-1}(\Phi_1-\Phi_2)+\frac{i\varepsilon}{\mu a_0\omega_0{}^2}$$

$$\left\{q\,e^{i\alpha}e^{i(s+\omega t)}-p\,e^{-i\alpha}e^{i(s-\omega t)}\right\},$$

$$\frac{1}{\omega_0}\cdot\frac{d}{dt}\frac{Z_1+Z_2}{a_0}=\frac{Z_1+Z_2}{\mu a_0\omega_0},$$

$$-\frac{1}{\omega_0}\frac{d}{dt}\frac{Z_1+Z_2}{\mu a_0\omega_0}=\frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}\cdot\frac{Z_1+Z_2}{a_0}+\frac{2\varepsilon}{\mu a_0\omega_0{}^2}\cdot Re^{ist}. \tag{52a}$$

Wie zu erwarten war, treten in diesen Gleichungen die zu R_1-R_2, $\Phi_1-\Phi_2$, . . gehörigen Impulse auch nicht einzeln, sondern nur in den analogen Verbindungen P_1-P_2, $\Psi_1-\Psi_2$ und Z_7+Z_2 auf.

Die Bewegungen in der r-φ-Ebene sind, wie die Gleichungen zeigen, unabhängig von den Bewegungen parallel z. Das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ kommt in diesen Gleichungen explizit nicht mehr vor. In (52) ist es nur noch in ω enthalten, welches wir also von ω_0 wohl unterscheiden müssen; in (57a) kommt es gar nicht mehr vor.

Wir lösen unsere Gleichungen (52) durch einfache Exponentialansätze, und zwar stellen wir unsere Lösungen, entsprechend den äußeren Anregungen, aus zwei Teilen dar, welche $e^{i(s+\omega t)}$ bzw. $e^{i(s-\omega t)}$ proportional sind.

Machen wir die Ansätze:

$$\frac{R_1-R_2}{a_0}=Ae^{i(s+\omega t)} \qquad \frac{P_1-P_2}{\mu a_0\omega_0}=Ce^{i(s+\omega t)}$$

$$\Phi_1-\Phi_2=Be^{i(s+\omega t)} \qquad \frac{\Psi_1-\Psi_2}{f_0}=De^{i(s+\omega t)}, \tag{53}$$

dann erhalten wir durch Einsetzen in (52) für A, B, C, D die Bestimmungsgleichungen:

$$\begin{gathered} i\frac{s+\omega}{\omega_0}A=C, \\ -i\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)C=\frac{21\sqrt{3}-12}{4(3\sqrt{3}-1)}A-2D+\frac{\varepsilon}{\mu a_0{\omega_0}^2}\cdot q\,e^{i\alpha}, \\ i\frac{s+\omega}{\omega_0}B=D-2A, \\ -i\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)D=\frac{1}{3\sqrt{3}-1}B+i\frac{\varepsilon}{\mu a_0{\omega_0}^2}\cdot q\,e^{i\alpha}. \end{gathered} \tag{54}$$

Eliminieren wir C und D, so folgen für A und B allein die Gleichungen:

$$\begin{gathered} \left\{\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^2\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)}\right\}A+2i\cdot\frac{s+\omega}{\omega_0}\cdot B=\frac{\varepsilon}{\mu a_0{\omega_0}^2}\cdot q\,e^{i\alpha} \\ -2i\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)A+\left\{\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^2-\frac{1}{3\sqrt{3}-1}\right\}B=i\frac{\varepsilon}{\mu a_0{\omega_0}^2}\cdot q\,e^{i\alpha}. \end{gathered}$$

Daraus bestimmen sich A und B zu:

$$\begin{gathered} A=\frac{\varepsilon}{\mu a_0{\omega_0}^2}\cdot q\,e^{i\alpha}\cdot\frac{\left(1+\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}} \\ B=\frac{i\,\varepsilon}{\mu a_0{\omega_0}^2}\cdot q\,e^{i\alpha}\cdot\frac{\left(1+\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}. \end{gathered} \tag{55}$$

Aus den Ansätzen für die mit $e^{i(s-\omega t)}$ proportionalen Glieder:

$$\begin{gathered} \frac{R_1-R_2}{a_0}=A'e^{i(s-\omega t)} \qquad \frac{P_1-P_2}{\mu a_0\omega_0}=C'e^{i(s-\omega t)} \\ \Phi_1-\Phi_2=B'e^{i(s-\omega t)} \qquad \frac{\Psi_1-\Psi_2}{f_0}=D'e^{i(s-\omega t)} \end{gathered} \tag{56}$$

findet man durch Einsetzen in (52) ähnlich wie oben die Lösungen:

$$A' = \frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2} p\, e^{-i\alpha} \frac{\left(1+\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^4 - \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$B' = \frac{-i\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2} \cdot p e^{-i\alpha} \cdot \frac{\left(1+\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^4 - \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}. \qquad (57)$$

Dadurch sind die Störungen in der r-φ-Ebene völlig bekannt. Für die z-Komponenten machen wir die Ansätze:

$$\frac{Z_1+Z_2}{a_0} = G e^{ist} \qquad \frac{Z_1+Z_2}{\mu a_0 \omega_0^2} = H e^{ist}, \qquad (58)$$

aus denen wir durch Einsetzen in (52a) G zu:

$$G = 2\frac{\varepsilon}{\mu a_0 \omega_0^2} R\, e^{ist} \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}} \qquad (59)$$

berechnen.

Setzen wir jetzt die in (55), (57) und (59) gefundenen Werte für:

$$\frac{R_1-R_2}{a_0}, \qquad \Phi_1-\Phi_2, \qquad \frac{Z_1+Z_2}{a_0}$$

in den in Formel (51a) für das Moment gegebenen Ausdruck ein, dann ergibt sich:

$$\mathfrak{M}_x = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu \omega_0^2}$$

$$\left| \cos(\alpha+\omega t)\, e^{i(\alpha+\omega t)} \cdot q \frac{\left(1+\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^4 - \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}} \right.$$

$$\left. + \cos(\alpha+\omega t)\, e^{-i(\alpha+\omega t)} p \cdot \frac{\left(1+\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^4 - \frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2 - \frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}} \right.$$

$$-i\sin(\alpha+\omega t)e^{i(\alpha+\omega t)}\cdot q\,\frac{\left(1+\frac{s+\omega}{\omega_0}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}-$$

$$+i\sin(\alpha+\omega t)e^{-i(\alpha+\omega t)}\cdot p\,\frac{\left(1+\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\Bigg|$$

$$\mathfrak{M}_y=-\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\omega_0{}^2}$$

$$\Bigg|\sin(\alpha+\omega t)\,e^{i(\alpha+\omega t)}q\,\frac{\left(1+\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$+\sin(\alpha+\omega t)\,e^{-i(\alpha+\omega t)}p\,\frac{\left(1+\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-1}}{\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}} \qquad (60)$$

$$+i\cos(\alpha+\omega t)\,e^{i(\alpha+\omega t)}q\,\frac{\left(1+\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$-i\cos(\alpha+\omega t)e^{-i(\alpha+\omega t)}p\,\frac{\left(1+\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2+\frac{15\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}{\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}\Bigg|$$

$$\mathfrak{M}_z=-\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\omega_0{}^2}\cdot R\,\frac{2}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}}. \qquad (60\,a)$$

Die Gleichungen (60) zeigen, daß das Moment des einzelnen Modells der elektrischen Feldstärke nicht gleichgerichtet ist. $\mathfrak{M}_x$ z. B. ist eine lineare Funktion von $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$, ebenso $\mathfrak{M}_y$. Es war dies ja auch zu erwarten; denn es sind in unserem Modell

die Richtungen völlig ungleichwertig, die z-Achse ist vor den anderen ausgezeichnet.

Wasserstoffgas hat sich beim Experiment als diamagnetisch erwiesen. Von einer Einstellung der Molekülachsen, wie sie z. B. von Langevin zur Erklärung des Paramagnetismus des Sauerstoffs herangezogen wird, kann also keine Rede sein. Wir müssen wohl annehmen, daß alle Molekülorientierungen gleichmäßig vorkommen [1]).

Unter dieser Voraussetzung wollen wir das mittlere elektrische Moment eines cm^3 des Wasserstoffgases berechnen.

§ 9. Die Komponenten des mittleren Momentes eines cm^3 als lineare Funktionen der Komponenten von $\mathfrak{E}$.

Um dieses mittlere Moment zu berechnen, verfahren wir folgendermaßen:

Wir geben ein im Raum festes Koordinatensystem und in demselben das äußere Magnetfeld $\mathfrak{H}$ und den elektrischen Vektor $\mathfrak{E}$ einer Lichtwelle. In dieses System setzen wir in beliebiger Orientierung und mit beliebiger Anfangsphase α unser Modell und bestimmen die Komponenten des Moments, das es unter der Einwirkung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ bekommt, in bezug auf diese festen Achsen. Diese haben natürlich je nach der Lage des Modells andere Werte. Wenn wir diese Komponenten mitteln über alle möglichen Lagen und Anfangsphasen α des Modells, so erhalten wir das „mittlere beobachtbare Moment“ $\overline{\mathfrak{m}}$ eines Moleküls. Wenn in einem cm^3 des Gases N Moleküle sich befinden, dann ist das mittlere beobachtbare Moment des cm^3, die Polarisation $\mathfrak{P}$, gleich

$$\mathfrak{P} = N \cdot \overline{\mathfrak{m}}.$$

Weil der Phasenwinkel α von der Lage des Moleküls im Raum ganz unabhängig ist, können wir auch zuerst über α mitteln. Wenn wir dies tun, gehen die Gleichungen (60), (60a) über in:

1) Es ist dies ein Punkt, der noch weiterer Erklärung bedarf, aber eventuell ursächlich verknüpft sein könnte mit der ja ebenfalls unerklärten Eigenschaft der Strahlungslosigkeit.

$$\mathfrak{M}_x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_x d\alpha = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\,\omega_0{}^2}\{(P+iQ)\,a+(P-iQ)\,b\},$$

$$\mathfrak{M}_y = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_y d\alpha = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\,\omega_0{}^2}\{(-iP+Q)\,a+(iP+Q)\,b\}, \qquad (61)$$

$$\mathfrak{M}_z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathfrak{M}_z d\alpha = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\,\omega_0{}^2}\{R\cdot c_0\},$$

worin wir abkürzungsweise die Ausdrücke

$$a = \frac{\left(1+\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega-s}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}}$$

$$b = \frac{\left(1+\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2+\frac{3\sqrt{3}}{8(3\sqrt{3}-1)}}{\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^4-\frac{21\sqrt{3}-8}{4(3\sqrt{3}-1)}\left(\frac{\omega+s}{\omega_0}\right)^2-\frac{27\sqrt{3}-4}{4(3\sqrt{3}-1)^2}} \qquad (62)$$

$$c_0 = \frac{2}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2-\frac{3\sqrt{3}}{4(3\sqrt{3}-1)}},$$

eingeführt haben.

Die Mittelung über alle Orientierungen erfordert eine etwas längere Rechnung: Wir legen das im Raume feste Koordinatensystem x', y', z' bequemlichkeitshalber so, daß seine z'-Achse mit der Richtung des äußeren Magnetfeldes $\mathfrak{H}'$ zusammenfällt. Wir wollen die Größen, die sich auf das im Raume feste System beziehen, mit einem Index (Strich) versehen, im Gegensatz zu den Größen, die sich auf das mit dem Molekül fest verbundene, früher eingeführte x-y-z-System beziehen. In dem festen System fixieren wir die Richtung und die Polarisationsebene der einfallenden Lichtwelle durch Angabe der Komponenten der in ihr schwingenden elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}'$:

$$\mathfrak{E}_x' = I' e^{ist}, \qquad \mathfrak{E}_y' = Q' e^{ist}, \qquad \mathfrak{E}_z' = R' e^{ist}. \qquad (63)$$

Weil wir das Moment $\mathfrak{M}$ nur kennen als Funktion von PQR, transformieren wir die $I'Q'R'$ auf das x-y-z-System und können

so $\mathfrak{M}$ durch $P'Q'R'$ ausdrücken. Andererseits wollen wir doch die Komponenten des Moments in bezug auf das feste System kennen, müssen also umgekehrt $\mathfrak{M}$ auf das feste System transformieren. So bekommen wir dann für die Komponenten von $\mathfrak{M}'$ Ausdrücke, die außer P', Q', R', $\mathfrak{H}'$ nur die Winkel enthalten, die die Lage des Modells zum festen System bestimmen. Diese angedeuteten Transformationen werden durch folgende Formeln ausgedrückt:

Bildet Ox' mit den Achsen Ox, Oy, Oz die Winkel α, β, γ usw., und schreibt man der Kürze halber die Buchstaben der Winkel für ihre cos, dann ist:

$$P = P'\alpha_1 + Q'\alpha_2 + R'\alpha_3, \qquad Q = \cdot\cdot, \qquad R = \cdot\cdot \tag{64}$$

Ebenso

$$\mathfrak{M}_x' = \mathfrak{M}_x\alpha_1 + \mathfrak{M}_y\beta_1 + \mathfrak{M}_z\gamma_1, \qquad \mathfrak{M}_y' = \cdot\cdot\cdot, \qquad \mathfrak{M}_z' = \cdot\cdot\cdot. \tag{65}$$

Setzt man (64) in (61) und diese wieder in (65) ein, so findet man für die Komponenten des Moments in guter Ordnung die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_x' &= -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\omega_0^2}\Big\{ \begin{array}{l} P'[(a+b) + \gamma_1^2(c_0 - a - b)] \\ + Q'[\gamma_1\gamma_2(c_0 - a - b) + i\gamma_3(a-b)] \\ + R'[\gamma_1\gamma_3(c_0 - a - b) - i\gamma_2(a-b)] \end{array}\Big\}, \\
\mathfrak{M}_y' &= -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\omega_0^2}\Big\{ \begin{array}{l} P'[\gamma_2\gamma_1(c_0 - a - b) - i\gamma_3(a-b)] \\ + Q'[a + b + \gamma_2^2(c_0 - a - b)] \\ + R'[\gamma_2\gamma_3(c_0 - a - b) + i\gamma_1)(a-b)] \end{array}\Big\}, \\
\mathfrak{M}_z' &= -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\omega_0^2}\Big\{ \begin{array}{l} P'[\gamma_1\gamma_3(c_0 - a - b) + i\gamma_2(a-b)] \\ + Q'[\gamma_3\gamma_2(c_0 - a - b) - i\gamma_1(a-b)] \\ + R'[(a+b) + \gamma_3^2(c_0 - a - b)] \end{array}\Big\}.
\end{aligned} \tag{66}$$

Weil wir schon über alle Anfangsphasen α gemittelt haben, ist es ganz gleichgültig, wie wir die x- und y-Achse in der Umlaufebene der Elektronen orientieren. Es kann nur noch die Lage der Molekülachse (z-Achse) gegen das feste System eine Rolle spielen. Diese Tatsache kommt in (71) dadurch zum Ausdruck, daß nur mehr die Winkel γ, nicht aber α und β vorkommen.

Um nun die Mittelung über alle Lagen des Modells auszuführen, benutzen wir zweckmäßig Polarkoordinaten Wir legen um den Nullpunkt des x'-y'-z'-Koordinatensystems die Einheitskugel und definieren die Lage der Molekülachse durch Angabe des Polabstandes ϑ von $\mathfrak{H}'$ und der geographischen Länge λ, gezählt von der x'-z'-Ebene aus. Dann bestehen die Beziehungen:

$$\gamma_1 = \sin\vartheta\cos\lambda, \qquad \gamma_2 = \sin\vartheta\sin\lambda, \qquad \gamma_3 = \cos\vartheta. \tag{67}$$

Diese setzen wir in Gleichung (66) ein, multiplizieren mit dem Flächenelement der Einheitskugel

$$\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda$$

integrieren erst nach λ zwischen 0 und 2π, dann nach ϑ zwischen 0 und π und dividieren schließlich durch die Oberfläche der Einheitskugel 4π.

So erhalten wir für das mittlere beobachtbare Moment eines Moleküls die Integrale:

$$\mathfrak{m}_x = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{\mu\,\omega_0^{\,2}} \int \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\lambda}{4\pi} \begin{cases} P'[a+b+\sin^2\vartheta\cos^2\lambda\,(c_0-a-b)] \\ +Q'[\sin^2\vartheta\sin\lambda\cos\lambda\,(c_0-a-b) \\ +R'[\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\lambda\,(c_0-a-b) \\ \qquad +i\cos\vartheta\,(a-b)] \\ \qquad -i\sin\vartheta\sin\lambda\,(a-b)] \end{cases} \tag{68}$$

$\overline{\mathfrak{m}}_y = \cdots$

$\overline{\mathfrak{m}}_z = \cdots$

Die Integration nach λ gibt, weil a, b und c_0 von λ unabhängig sind:

$$\overline{\mathfrak{m}}_x = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{4\mu\,\omega_0^{\,2}} \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \begin{cases} P'[a+b+c_0+\cos^2\vartheta\,(a+b-c_0)] \\ +Q'[2i\cos\vartheta\,(a-b)] \end{cases},$$

$$\mathfrak{m}_y = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{4\mu\,\omega_0^{\,2}} \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \begin{cases} P'[-2i\cos\vartheta\,(a-b)] \\ +Q'[a+b+c_0+\cos^2\vartheta\,(a+b-c_0)] \end{cases}, \tag{69}$$

$$\mathfrak{m}_z = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{2\mu\,\omega_0^{\,2}} \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, R'[a+b+\cos^2\vartheta\,(c_0-a-b)].$$

Bei der Integration nach ϑ haben wir zu beachten, daß a und b Funktionen von ϑ sind; denn sie enthalten ja die Umlaufszahlen $\omega = \omega_0(1+r\cos\vartheta)$. r hat nach Formel (21) den Wert $\frac{|\mathfrak{H}|}{2\omega_0 c}\cdot\frac{\varepsilon}{\mu}$. Wenn wir die Integration nach ϑ ausführen würden, fänden wir für die Komponenten von $\overline{\mathfrak{m}}$ komplizierte Funktionen von $|\mathfrak{H}|$. Erfahrungsgemäß bringt aber ein Magnetfeld nur äußerst geringe Änderungen des Moments hervor. Wir können daher das Moment nach Potenzen von $|\mathfrak{H}|$ entwickeln und mit dem $|\mathfrak{H}|$ proportionalen Gliede abbrechen. Die gewünschte Potenzreihe erhalten wir, wenn wir die Integranden von (69) nach r entwickeln.

(Daß r stets sehr klein gegen 1 ist, haben wir in § 4 gezeigt.) Wir finden, wenn wir berücksichtigen, daß nach (62) a als Funktion von $\left(r\cos\vartheta - \frac{s}{\omega_0}\right)$ und b als solche von $\left(r\cos\vartheta + \frac{s}{\omega_0}\right)$ aufgefaßt werden kann, für $\left(\frac{\partial a}{\partial r}\right)_0$ und [1] $\left(\frac{\partial b}{\partial r}\right)_0$:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial r}\right)_{r=0} = -\frac{\partial a_0}{\partial \frac{s}{\omega_0}}\cdot\cos\vartheta, \qquad \left(\frac{\partial b}{\partial r}\right)_{r=0} = \frac{\partial b_0}{\partial \frac{s}{\omega_0}}\cos\vartheta. \tag{70}$$

Hingegen ist

$$\frac{\partial c_0}{\partial r} = 0.$$

Durch diese Entwicklung gehen die Ausdrücke (69) über in:

$$\mathfrak{m}_x = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{4\mu\omega_0^2}\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \left\{ \begin{array}{l} P'[a_0 + b_0 + c_0 + \cos^2\vartheta(a_0 + b_0 - c_0)] \\ \quad + 2\,i\,Q'\cos\vartheta\,(a_0 - b_0) \end{array} \right.$$

$$+ r\left[\begin{array}{l} P'\dfrac{\partial}{\partial\frac{s}{\omega_0}}(-a_0 + b_0)\cos\vartheta + P'\dfrac{\partial}{\partial\frac{s}{\omega_0}}(-a_0 + b_0)\cos^3\vartheta \\ \quad - 2iQ'\dfrac{\partial}{\partial\frac{s}{\omega_0}}(a_0 + b_0)\cos^2\vartheta \end{array} \right] \Bigg\},$$

$$\overline{\mathfrak{m}}_y = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{4\mu\omega_0^2}\int_0^\pi \sin\vartheta\, d\vartheta \left\{ \begin{array}{l} Q'[a_0 + b_0 + c_0 + \cos^2\vartheta(a_0 + b_0 - c_0)] \\ \quad - 2\,i\,P'\cos\vartheta\,(a_0 - b_0) \end{array} \right.$$

$$+ r\left[\begin{array}{l} Q'\dfrac{\partial}{\partial\frac{s}{\omega_0}}(-a_0 + b_0)\cos\vartheta + Q'\dfrac{\partial}{\partial\frac{s}{\omega_0}}(-a_0 + b_0)\cos^3\vartheta \\ \quad + 2iP'\dfrac{\partial}{\partial\frac{s}{\omega_0}}(a_0 + b_0)\cos^2\vartheta \end{array} \right] \Bigg\}, \tag{71}$$

$$\overline{\mathfrak{m}}_z = -\frac{\varepsilon^2 e^{ist}}{2\mu\omega_0^2}\int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta R' \left\{ \begin{array}{l} [a_0 + b_0 + \cos^2\vartheta\,(c_0 - a_0 - b_0)] \\ + r\left[\dfrac{\partial}{\partial\frac{s}{\omega_0}}(-a_0 + b_0)\cos\vartheta + \right. \\ \qquad \left. \dfrac{\partial}{\partial\frac{s}{\omega_0}}(a_0 - b_0)\cos^3\vartheta \right] \end{array} \right\}.$$

1) a_0 bedeutet in Zukunft stets $(a)_{\omega=\omega_0}$, ebenso $b_0 = (b)_{\omega=\omega_0}$.

Führen wir die Integration nach ϑ nun wirklich aus, so erhalten wir nach Multiplikation mit N für die Komponenten, der Polarisation $\mathfrak{P}$ endgültig die Werte:

$$\mathfrak{P}_x = -\frac{N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left\{\frac{2}{3}\left(a_0+b_0+\frac{c_0}{2}\right)\cdot\mathfrak{E}_x - \frac{i}{3}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{\mathfrak{H}}{2\omega_0 c}\cdot\frac{\partial(a_0+b_0)}{\partial\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}\cdot\mathfrak{E}_y\right\},$$

$$\mathfrak{P}_y = -\frac{N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left\{\frac{2}{3}\left(a_0+b_0+\frac{c_0}{2}\right)\cdot\mathfrak{E}_y + \frac{i}{3}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{|\mathfrak{H}|}{2\omega_0 c}\cdot\frac{\partial(a_0+b_0)}{\partial\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}\cdot\mathfrak{E}_x\right\}, \quad (72)$$

$$\mathfrak{P}_z = -\frac{N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left\{\frac{2}{3}\left(a_0+b_0+\frac{c_0}{2}\right)\mathfrak{E}_z\right\}.$$

(Da das mit dem Molekül verbundene Koordinatensystem durch die Mittelung bedeutungslos geworden ist, haben wir alle Indizes wieder weggelassen.)

Diese Ausdrücke zeigen deutlich die Anisotropie des magnetisierten Wasserstoffs. Die z-Achse ist als Richtung des Magnetfeldes ausgezeichnet, und um dieselbe herrscht rotatorische Symmetrie. Das Wasserstoffgas verhält sich in magnetisiertem Zustande wie ein kristallinischer Körper. Indem wir diese berechnete Polarisation $\mathfrak{P}$ in die Maxwellschen Gleichungen einführen, haben wir die Möglichkeit, das optische Verhalten des Wasserstoffs im Magnetfelde nach jeder Richtung zu untersuchen. Was uns aber hier vor allem interessiert, das ist die spezielle Erscheinung der Rotationsdispersion.

§ 10. Exkurs über den Zusammenhang der linearen Vektorfunktion $\mathfrak{P}(\mathfrak{E})$ mit der Drehung der Polarisationsebene.

Schon in der elastischen Lichttheorie war es bekannt, daß gerade eine solche Vektorfunktion, wie die hier vorliegende zu der Erscheinung der Drehung der Polarisationsebene führt. Die gewöhnliche Theorie des Zeemaneffektes im Falle quasielastisch gebundener Elektronen führt ebenfalls auf ganz analog gebaute Ausdrücke[1]).

Wenn wir die in der Lichtwelle schwingende magnetische Kraft mit $\mathfrak{H}$, die elektrische mit $\mathfrak{E}$, die dielektrische Verschiebung

1) W. Voigt, Magneto- und Elektrooptik, S. 126.

mit $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$ bezeichnen, dann lauten die Grundgleichungen für die Lichtfortpflanzung:

$$\dot{\mathfrak{R}} = -c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}, \qquad \dot{\mathfrak{D}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{R}. \tag{73}$$

Im Spezialfalle einer ebenen homogenen Lichtwelle, die sich parallel zur x-Achse, also parallel zum äußeren Magnetfelde fortpflanzt, haben wir für die Komponenten von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{E}$ Ansätze von der Form

$$Ae^{is\left(t-\frac{x}{v}\right)}$$

zu machen, wo A die komplexe Amplitude, v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle bedeutet. Durch diese Ansätze gehen die Gleichungen (73) über in:

$$\mathfrak{R}_x = -\frac{c}{v}\mathfrak{E}_y, \qquad \mathfrak{R}_y = +\frac{c}{v}\mathfrak{E}_x, \qquad \mathfrak{R}_z = 0, \tag{74}$$

$$\mathfrak{D}_x = +\frac{c}{v}\mathfrak{R}_y, \qquad \mathfrak{D}_y = -\frac{c}{v}\mathfrak{R}_x, \qquad \mathfrak{D}_z = 0. \tag{75}$$

$\frac{v}{c} = n$ ist der gewöhnliche Brechungsindex.

Diese Gleichungen zeigen uns, daß longitudinale Komponenten nicht vorkommen und daß $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{E}_y$, ebenso $\mathfrak{R}_x$ und $\mathfrak{R}_y$ unabhängig voneinander sind, daß also transversale Schwingungen beliebiger Schwingungsform fortgepflanzt werden können. Eliminiert man aus (74) und (75) die magnetischen Kräfte, so entsteht:

$$\mathfrak{D}_x = n^2\mathfrak{E}_x, \qquad \mathfrak{D}_y = n^2\mathfrak{E}_y. \tag{76}$$

Wegen $\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}$ erhalten wir schließlich für den Brechungsindex n die Bestimmungsgleichungen:

$$\mathfrak{E}_x(n^2-1) = 4\pi\mathfrak{P}_x, \qquad \mathfrak{E}_y(n^2-1) = 4\pi\mathfrak{P}_y, \tag{77}$$

die, wenn wir für $\mathfrak{P}_x$ und $\mathfrak{P}_y$ die gefundenen Werte aus (72) einsetzen, übergehen in:

$$n^2-1 = -\frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left\{\frac{2}{3}\left(a_0+b_0+\frac{c_0}{2}\right) - \frac{i}{3}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{|\mathfrak{H}|}{2\omega_0 c}\cdot\frac{\partial(a_0+b_0)}{\partial\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}\cdot\frac{\mathfrak{E}_y}{\mathfrak{E}_x}\right\}, \tag{78}$$

$$n^2-1 = -\frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left\{\frac{2}{3}\left(a_0+b_0+\frac{c_0}{2}\right) + \frac{i}{3}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{|\mathfrak{H}|}{2\omega_0 c}\cdot\frac{\partial(a_0+b_0)}{\partial\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}\cdot\frac{\mathfrak{E}_x}{\mathfrak{E}_y}\right\}.$$

Diese Gleichungen sind nur dann miteinander verträglich, wenn

$$\frac{\mathfrak{E}_x}{\mathfrak{E}_y} = -i \qquad \text{oder} \qquad \frac{\mathfrak{E}_x}{\mathfrak{E}_y} = +i \tag{79}$$

ist. Sie liefern dann die Brechungsindizes

$$n_1^2 - 1 = -\frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left\{\frac{2}{3}\left(a_0 + b_0 + \frac{c_0}{2}\right) + \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{|\mathfrak{H}|}{2\omega_0 c}\frac{\partial(a_0 + b_0)}{\partial\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}\right\},$$
$$n_2^2 - 1 = -\frac{4\pi N\varepsilon^2}{\mu\omega_0^2}\left\{\frac{2}{3}\left(a_0 + b_0 + \frac{c_0}{2}\right) - \frac{1}{3}\frac{\varepsilon}{\mu}\frac{|\mathfrak{H}|}{2\omega_0 c}\frac{\partial(a_0 + b_0)}{\partial\left(\frac{s}{\omega_0}\right)}\right\}. \quad (80)$$

Wir finden, daß sich in unserm magnetisierten Wasserstoff zwei Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten entsprechend den Brechungsindizes n_1 und n_2 fortpflanzen können. Die beiden Wellen sind charakterisiert durch die Bedingungen (79), welche bekanntlich die fortgepflanzten Wellen als zirkulare bestimmen. Dem Werte n_1 entspricht dabei positiver, dem Werte n_2 negativer Umlaufsinn.

Daß das Vorhandensein von zwei entgegengesetzt rotierenden zirkular polarisierten Wellen, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen, identisch ist mit der Drehung der Polarisationsebene geradlinig polarisierten Lichtes, hat schon Fresnel erkannt. Die Drehung χ ist proportional dem vom Lichte im Medium zurückgelegten Wege z und wird im übrigen durch die Formel:

$$\chi = \frac{s \cdot z}{2c}(n_1 - n_2) \quad (81)$$

gegeben.

Weil die Brechungsindizes n_1 und n_2 nur sehr wenig vom Brechungsindex n im feldlosen Zustande verschieden sind, ist der obige Ausdruck praktisch identisch mit

$$\chi = \frac{s \cdot z}{4cn}(n_1^2 - n_2^2). \quad (82)$$

Setzen wir die Werte für n_1^2 und n_2^2 aus Formel (80) ein, so finden wir für die Drehung der Polarisationsebene, die linear polarisiertes Licht beim Durchlaufen einer Strecke z erfährt:

$$\chi = \frac{z}{n}\frac{\pi}{c^2}\frac{N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2}{\omega_0^2}\frac{s}{\omega_0}\left\{-\frac{1}{3}\frac{\partial(a_0 + b_0)}{\partial\frac{s}{\omega_0}}\right\}\cdot|\mathfrak{H}|. \quad (83)$$

In dieser ersten Näherung (um eine solche handelt es sich, weil wir ja nach r entwickelt haben) ist die Drehung proportional dem Magnetfelde $|\mathfrak{H}|$. Ferner ist sie proportional der Länge z des vom

Strahl im magnetisierten H_2 zurückgelegten Weges. Diese Proportionalität hat Verdet in der Formel

$$\chi = V \cdot z \cdot |\mathfrak{H}| \tag{84}$$

zum Ausdruck gebracht. Man nennt den darin auftretenden Faktor V die Verdetsche Konstante. Für diese berechnet sich, falls wir noch den Brechungsindex n im feldlosen Zustande durch 1 ersetzen [1]).

$$V = \frac{\pi}{c_2} \frac{N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2}{{\omega_0}^2} \cdot \frac{s}{\omega_0} \left\{ -\frac{1}{3} \cdot \frac{\partial(a_0 + b_0)}{\partial \frac{s}{\omega_0}} \right\} . \tag{85}$$

Die Verdetsche Konstante V gibt uns das Drehvermögen pro Einheit der Feldstärke und pro Längeneinheit als Funktion von N, ε, μ, ω_0 und der Frequenz des Lichtes. Wenn wir auf die Beziehung (6) zwischen ω_0 und h zurückgreifen, können wir V aus den vier universellen Konstanten N, ε, μ und h von vornherein berechnen.

§ 11. Vergleich der Rotationsdispersion mit der gewöhnlichen Dispersionsformel.

Entwicklung von V nach Potenzen von $\frac{s}{\omega_0}$.

Für die Dispersion des Wasserstoffs fand P. Debye unter Zugrundelegung dieses Modells die Formel:

$$n = 1 - \frac{4\pi N\varepsilon \frac{\varepsilon}{\mu}}{{\omega_0}^2} \cdot \frac{1}{3}\left(a_0 + b_0 + \frac{c_0}{2}\right) . \tag{86}$$

Wir wollen untersuchen, ob sich die Verdetsche Konstante aus der Dispersionsformel durch eine einfache Differentiation herleiten läßt. Diese Frage ist deshalb von Interesse, weil H. Becquerel [2]) rein empirisch einen Zusammenhang zwischen Dispersion und magnetischer Drehung fand. Er konnte nämlich zeigen, daß für viele Substanzen der Brechungsindex n und die Verdetsche Konstante durch die Formel

$$V = -k \cdot s \cdot \frac{dn}{ds} \tag{87}$$

1) Er beträgt in Wirklichkeit bei 760 mm Druck und im sichtbaren Gebiete 1,0002.

2) H. Becquerel, C. R. 125, S. 679, 1897.

verknüpft sind, wo k eine der Substanz individuelle Konstante bedeutet. Für den Fall quasielastisch gebundener Elektronen hat W. Voigt[1]) gezeigt, daß die Becquerelsche Formel nur unter ganz bestimmten Voraussetzungen gültig ist. Z. B. dann, wenn sich die Dispersion des betreffenden Körpers so darstellen läßt, als ob nur ein einziger Absorptionsstreifen vorhanden wäre. Dann müßte der Faktor k, wie an jener Stelle ebenfalls abgeleitet wurde, den Wert $\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon}{\mu}$ haben. Im vorliegenden Falle ist die Beziehung (87), das Becquerelsche Gesetz, nicht erfüllt. —

Die Formel (85) ist noch völlig unübersichtlich. Um einen Überblick über den Verlauf der Verdetschen Konstante zu gewinnen, wollen wir eine Reihenentwicklung derselben vornehmen, die auch der üblichen Darstellungsweise in der gewöhnlichen Theorie besser entspricht.

Wir entwickeln die Größen a_0 und b_0, die ja nur Funktionen von $\frac{s}{\omega_0}$ sind, nach Potenzen von $\frac{s}{\omega_0}$. Daß $\frac{s}{\omega_0}$ im ganzen sichtbaren Spektrum und bis weit ins Ultraviolette eine gegen 1 kleine Größe bleibt, geht aus den Rechnungen über Dispersion hervor.

Wir finden für a_0: (S. Formel 25)

$$a_0 = -\left[3{,}20 + 4{,}61\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 13{,}66_5\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 31{,}67\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3 + 77{,}36\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^4\right], \tag{88}$$

für b_0

$$b_0 = -\left[3{,}20 - 4{,}61\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 13{,}66_5\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 - 31{,}67\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3 + 77{,}36\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^4\right], \tag{88a}$$

also für $a_0 + b_0$:

$$a_0 + b_0 = -\left[6{,}40 + 27{,}33\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 154{,}72_5\left(\frac{s}{\omega^0}\right)^4\right].$$

Für den Differentialquotienten in Formel (85) ergibt sich sonach

$$\frac{\partial (a_0 + b_0)}{\partial \left(\frac{s}{\omega_0}\right)} = 54{,}66\left(\frac{s}{\omega_0}\right) + 618{,}9\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^3.$$

1) W. Voigt, Wied. Ann. **67**, 350, 1899.

So finden wir als praktisch zu handhabende Formel für die magnetische Drehung bis auf Glieder vierter Ordnung in $\frac{s}{\omega_0}$

$$V = \frac{\pi}{c^2} \cdot \frac{N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2}{{\omega_0}^2}\left\{18{,}22\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 206{,}3\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^4\right\}. \qquad (89)$$

III. Vergleich mit der Erfahrung.

§ 12. Berechnung von $\frac{\varepsilon}{\mu}$ und ε auf Grund der empirischen Formel Siertsemas:

Etwa um 1880 zeigten A. Kundt und W. C. Röntgen[1]), und ungefähr gleichzeitig H. Becquerel, daß der Faradayeffekt auch bei Gasen existiert. Kundt und Röntgen komprimierten die Gase in einem 1,5 m langen kupfernen Rohre von 3 mm lichter Weite. Das Rohr befand sich in einem Solenoid, in dem durch starke Ströme eine durchschnittliche Feldstärke von ca. 600 Gauß erzeugt wurde. Natürlich ist das Feld im Innern einer solchen Spule nicht homogen und an Stelle der einfachen Verdetschen Formel

$$\chi = V \cdot z \cdot |\mathfrak{H}|$$

hat man in diesem Falle

$$\chi = V \int \mathfrak{H}_z \, dz$$

zu setzen, wobei das Integral über den ganzen vom Licht im Gase zurückgelegten Weg zu erstrecken ist. Um eine Ausmessung der Feldstärke zu umgehen, wurde das Rohr mit Schwefelkohlenstoff gefüllt, dessen viel größere Drehung genau bekannt war, und durch Division der beiden Drehungen, die bei genau gleichen Stromstärken erhalten waren, das Verhältnis der Verdetschen Konstanten bestimmt.

Das Kupferrohr war durch Glasplatten abgeschlossen. Da diese bei den hohen Drucken der Gasfüllungen doppelbrechend wurden, war es nötig, Polarisator und Analysator im Innern des Rohres anzubringen. Die Drehung des Analysators wurde einfach dadurch bewerkstelligt, daß man das Kupferrohr mit Hilfe von Gewichten um den nötigen (stets sehr kleinen) Winkel drillte. Wegen der außerordentlichen Kleinheit der Verdetschen Kon-

1) A. Kundt und W. C. Röntgen, Wied. Ann. 10, 257, 1880.

stanten bei Gasen (bei Wasserstoff von Atmosphärendruck und 0^0 C. beträgt V für Na Licht $V = 558 \cdot 10^{-8}$ $\frac{\text{Winkelminuten}}{\text{Gauß cm}}$) sind die Messungen schwierig. Die Messung von Kundt und Röntgen bezieht sich nur auf eine Wellenlänge. Von Becquerel liegen keine Messungen an Wasserstoff vor. Wohl aber hat L. H. Siertsema[1]) neben vielen anderen Gasen Wasserstoff auf sein optisches Verhalten im Magnetfelde untersucht, und zwar erstrecken sich seine Messungen über das ganze sichtbare Gebiet. Die Messungen Siertsemas wurden im ultravioletten Gebiet mit Hilfe einer photographischen Methode fortgesetzt von J. F. Sirks[2]), der im übrigen die Apparatur Siertsemas benutzte. Die Versuche wurden gemacht an Wasserstoff von 85 Atmosphären Druck und 9,5° C. Die Messungen Sirks schließen sich denjenigen von Siertsema ausgezeichnet an. Auch stellt die von Siertsema angegebene zweikonstantige Formel die Messungen von Sirks so gut dar, als dies überhaupt mit einer zweikonstantigen Formel erreichbar ist. Es ist klar, daß bei sehr kurzen Wellen (bis $\lambda = 238\,\mu\mu$) das Glied mit s^6 anfängt, merkliche Werte zu erhalten.

Die Drehung wird von Siertsema[3]) dargestellt durch die Formel:

$$V = \frac{\pi}{180 \cdot 60} \cdot 10^{-6} \left(\frac{151 \pm 1{,}2}{\lambda^2} + \frac{2{,}38 \pm 0{,}27}{\lambda^4} \right), \qquad (90)$$

wobei die Wellenlänge λ in μ auszudrücken ist. Die mit $\pm$ hinzugefügten Zahlen stellen die wahrscheinlichen Fehler dar. Diese experimentelle Formel hat genau denselben Typus wie die theoretisch abgeleitete. Wir können die empirische mit der theoretisch abgeleiteten Formel gliedweise vergleichen und erhalten so die zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} N\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2 \cdot 18{,}22 \cdot \frac{4\pi^2 c^2}{{\omega_0}^4} &= C \frac{151 \pm 1{,}2}{10^8}, \\ N\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2 \cdot 206{,}6 \frac{16\pi^4 c^4}{{\omega_0}^6} &= C \frac{2{,}38 \pm 0{,}27}{10^{16}}. \end{aligned} \qquad (91)$$

Die Konstante C enthält die Zahlen, die herrühren von der Umrechnung der Winkelminuten in absolutes Bogenmaß und von der Reduktion der Messungen auf den Druck einer Atmosphäre und

1) L. H. Siertsema, Arch. Néerl. Serie 2, **2**, 291, 1889.
2) J. F. Sirks, Diss. Leiden 1912. Phys. Zeitschr. **14**, 336, 1913.
3) Siehe Siertsema, l. c.

die Temperatur 0^0 C. Bei dieser Umrechnung auf normalen Druck hat man zu beachten, daß der Wasserstoff bei $p = 85$ kg/cm^2 etwa 4,2 Proz. Abweichung vom Boyleschen Gesetze zeigt[1]). C hat den Wert:

$$C = c^2 \cdot \frac{10^{-6} \cdot 1{,}033 \cdot 282{,}5}{180 \cdot 60\ 85 \cdot 273 \cdot 0{,}958}.$$

Durch Division dieser beiden Formeln (91) folgt zunächst:

$$\frac{151}{2{,}38} \cdot 10^8 = \omega_0^{\,2} \cdot \frac{18{,}22}{206{,}6} \cdot \frac{1}{4\pi^2 c^2},$$

d. h.

$$\omega_0 = (5{,}06 \pm 0{,}28) \cdot 10^{16}\,\mathrm{sec}^{-1}. \qquad 1)$$

Setzen wir diesen Wert in die erste Gleichung ein, so berechnet sich andererseits $N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2$ zu:

$$N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2 = (2{,}94 \pm 0{,}69) \cdot 10^{45}. \qquad 2)$$

Aus diesen zwei Werten ω_0 und $N\varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^2$ lassen sich zwei der universellen Größen N, ε, μ, h berechnen, wenn die anderen zwei gegeben sind. Nehmen wir z. B. für $N\varepsilon$ den Wert, der sich aus der elektrolytischen Ladung eines Grammatoms $E = 96470$ Coulomb, dem Atomgewicht $A = 1{,}008$ und der Dichte $\delta = 8{,}985 \cdot 10^{-5}$ des Wasserstoffs bestimmt zu

$$N\varepsilon = \frac{E}{2A\delta} = 1{,}289 \cdot 10^{10},$$

so folgt aus 2) für $\frac{\varepsilon}{\mu}$ der Wert:

$$\underline{\frac{\varepsilon}{\mu} = (4{,}78 \pm 0{,}59) \cdot 10^{17}.}$$

(Der wahrscheinliche Fehler des so berechneten $\frac{\varepsilon}{\mu}$ beträgt ca. 12 Proz.)

Nehmen wir zu diesem noch den Wert $h = 6{,}5 \cdot 10^{-27}$ hinzu, so erhalten wir aus 1)

$$\underline{\varepsilon = (4{,}86 \pm 0{,}17) \cdot 10^{-10}.}$$

(Der wahrscheinliche Fehler des so berechneten ε beträgt ca. 4 Proz.).

Diese Werte sind durchaus befriedigend und sprechen zugunsten des Modells. Es zeigt sich also, daß das zugrunde gelegte Wasserstoffmodell nicht nur die Dispersion, sondern auch die magnetische Drehung unter alleiniger Benutzung universeller Größen quantitativ zu erklären vermag.

1) Siehe Siertsema, l. c.

Lebenslauf.

Geboren am 3. Februar 1890 in St. Gallen (Schweiz), besuchte ich dort die Primar und die städtische Realschule. Ursprünglich beabsichtigte ich, mich kaufmännisch zu betätigen und besuchte deshalb während zwei Jahren die eidgenössische Handels- und Verkehrsschule in St. Gallen. Als ich mich dann doch zum Hochschulstudium entschloß, bereitete ich mich durch Privatunterricht während $1\frac{1}{2}$ Jahren zur Aufnahmeprüfung an die Technische Hochschule in Zürich vor. Im Herbst 1908 bestand ich die Prüfung und ließ mich an der naturwissenschaftlichen (VII.) Abteilung immatrikulieren. Im Herbst 1909 ging ich an die math.-physikal. (VIII.) Abteilung über, um mich von nun an ganz dem Studium der Physik zu widmen. Ostern 1912 wurde ich in Königsberg, Michaelis 1912 in Göttingen immatrikuliert. Hier fand ich im physikalischen und elektrotechnischen Institut reiche Anregung.

Ganz besonders dankbar bin ich meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Prof. P. Debye, Prof. H. Th. Simon und Geh. Reg.-Rat Prof. W. Voigt, welche meine wissenschaftliche Ausbildung stets mit so großem Wohlwollen förderten.

Ich besuchte die Vorlesungen und Übungen folgender Herren in Zürich: Beyel, Brun, Du Pasquier, Geiser, Großmann, Grubenmann, Hirsch, Jaccard, Keller, Kollros, Meißner, Rudio, Saitschick, Schröder, Seippel, Spyker, Treadwell, Weber, Weiß, Willstätter; in Königsberg: Battermann, Faber, Kaufmann, Volkmann; in Göttingen: Debye, Hilbert, v. Kármán, Landau, Madelung, Prandtl, Reich, Simon, Tammann, Voigt, Weyl.

Allen meinen Lehrern bin ich zu aufrichtigem Danke verpflichtet.